Esercitazione 7 del corso di Statistica 2

Dott.ssa Paola Costantini

10 Marzo 2009

Esercizio 1

La distribuzione dei pesi dei pesi pacchetti per confezionare per confezionare le caramelle, in grammi, prodotti da un'azienda, ha una distribuzione Normale con scarto quadratico medio pari a 7. Per stimare il peso medio si estrae un campione di 10 pacchetti ottenendo i pesi seguenti:

170, 180, 172, 171, 183, 181, 175, 178, 185, 184

Si vuole costruire un intervallo di confidenza al 90%.
La stima puntuale della media è μ = 177,9.

Soluzione

Per costruire un intervallo di confidenza al livello 1-α è necessario determinare quel valore $z_{\alpha/2}$ tale che la probabilità che z assuma valore nell'intervallo (-$z_{\alpha/2}$; $z_{\alpha/2}$) sia uguale a 1-α, per cui avremo P(-$z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}$) =0,90.
La funzione di ripartizione di una v.c. Normale standardizzata in $z_{\alpha/2}$ vale 1-$\alpha/2$, cioè $\phi(z_{\alpha/2})$= 1-$\alpha/2$.
Nel nostro caso α= 0,10, per cui $\alpha/2$= 0,05.
Il valore $z_{\alpha/2}$ è tale che ϕ(0,05)= 1-0,05=0,95 e dalle tavole risulta che $z_{0,05}$ = 1,645. Di conseguenza lo stimatore per l'intervallo è

$$stimatore \begin{Bmatrix} L_1 = \overline{X} - 1{,}645 \cdot 7/\sqrt{10} \\ L_2 = \overline{X} + 1{,}645 \cdot 7/\sqrt{10} \end{Bmatrix}$$

Sostituendo il valore osservato della media campionaria $\bar{x} = 177{,}9$ si ottiene la stima dell'intervallo. Gli estremi sono:

$$\begin{cases} l_1 = 177{,}9 - 1{,}645 \cdot 7/\sqrt{10} = 174{,}26 \\ l_2 = 177{,}9 + 1{,}645 \cdot 7/\sqrt{10} = 181{,}54 \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo è possibile ottenere l'intervallo di confidenza al 95%.
In questo caso P(-$z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}$) =0,95, con α= 0,05 e $\alpha/2$= 0,025.
$\phi(z_{\alpha/2})$= 1-$\alpha/2$, cioè ϕ(0,025)= 1-0,025=0,975 e dalle tavole risulta che $z_{0,025}$ = 1,96.

Gli estremi del nostro intervallo saranno:

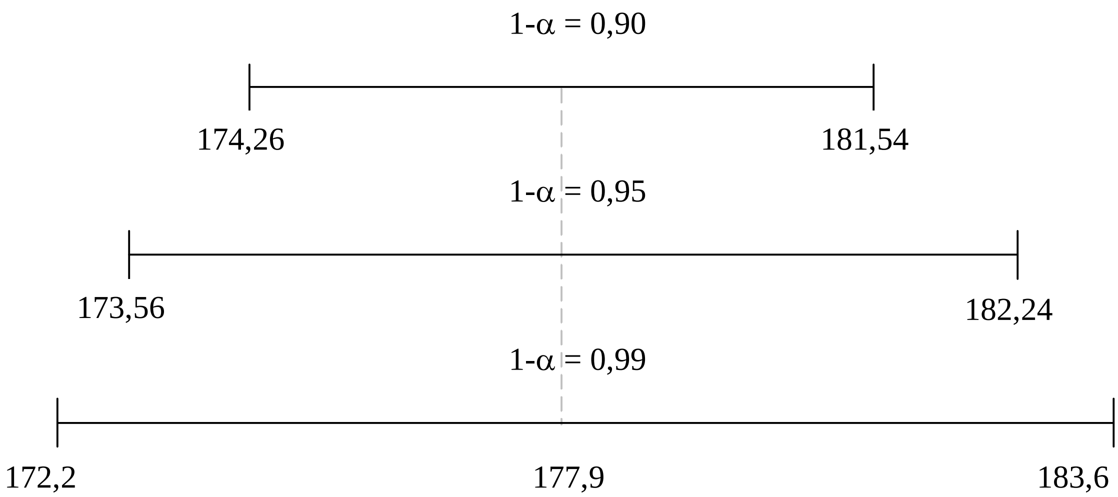
$$\begin{cases} l_1 = 177{,}9 - 1{,}96 \cdot 7/\sqrt{10} = 173{,}56 \\ l_2 = 177{,}9 + 1{,}96 \cdot 7/\sqrt{10} = 182{,}24 \end{cases}$$

Infine determiniamo l'intervallo di confidenza al 99%.

In questo caso $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}99$, con $\alpha = 0{,}01$ e $\alpha/2 = 0{,}005$.
$\phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, cioè $\phi(0{,}005) = 1-0{,}005 = 0{,}995$ e dalle tavole risulta che $z_{0{,}005} = 2{,}575$.

Gli estremi del nostro intervallo saranno:

$$\begin{cases} l_1 = 177{,}9 - 2{,}575 \cdot 7/\sqrt{10} = 172{,}2 \\ l_2 = 177{,}9 + 2{,}575 \cdot 7/\sqrt{10} = 183{,}6 \end{cases}$$



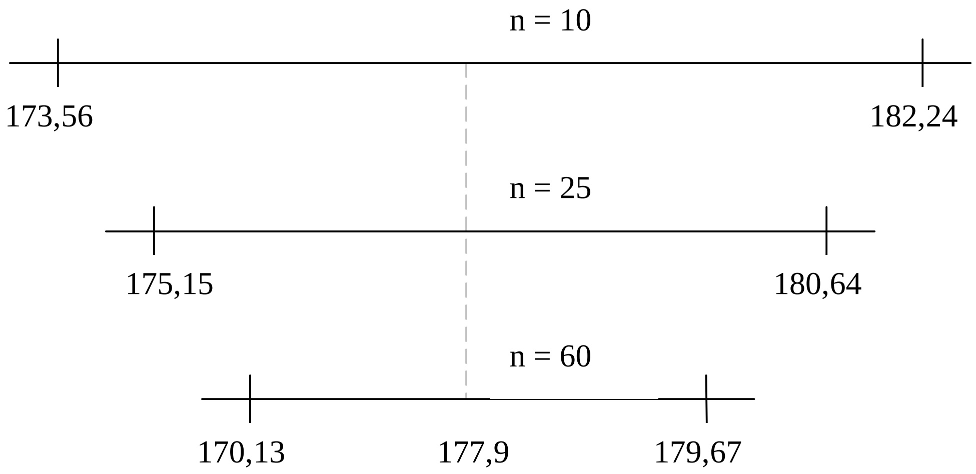
All'aumentare del livello di confidenza aumenta la lunghezza degli intervalli.

Ora supponiamo che dalla stessa popolazione di pesi di sacchetti per confezionare caramelle, si estraggono campioni di numerosità diversa, ad esempio: n=10, n=25, n=60. Assumiamo per semplicità che la stima puntuale della media sia sempre la stessa, $\bar{x} = 177{,}9$ per i diversi valori di n. Per n=10 sappiamo che l'intervallo di confidenza al 95% è (173,56;182,24); per n=25 avremo:

$$\begin{cases} l_1 = 177{,}9 - 1{,}96 \cdot 7/\sqrt{25} = 175{,}156 \\ l_2 = 177{,}9 + 1{,}96 \cdot 7/\sqrt{25} = 180{,}64 \end{cases}$$

Per n = 60 avremo gli estremi:

$$\begin{cases} l_1 = 177{,}9 - 1{,}96 \cdot 7 / \sqrt{60} = 176{,}13 \\ l_2 = 177{,}9 + 1{,}96 \cdot 7 / \sqrt{60} = 179{,}67 \end{cases}$$



All'aumentare della numerosità campionaria, a parità di livello di confidenza, si riduce la lunghezza degli intervalli in quanto vi è un minore grado di incertezza. Aumentando *n* si raccoglie una maggiore quantità di informazioni e ciò consente una stima più precisa.

Esercizio n 2

Volendo stimare la media di una popolazione distribuita in modo normale e con varianza non nota, si estrae da essa un campione di prefissata numerosità e di esso si calcola la media e la varianza campionaria corretta.
Supponiamo che la perdita di peso di n =16 pezzi di metallo, dopo un certo intervallo di tempo sia di 3,42 grammi, con una varianza pari a 0,4624. Costruire un intervallo di confidenza al 99% per la media della perdita di peso di metallo.

Soluzione

Il problema posto consiste nella stima per intervalli della media della popolazione di cui non si conoscer la varianza, sulla base di un campione di piccole dimensioni (n=16).
Lo stimatore per intervallo della media di una popolazione normale, con varianza incognita, al livello di confidenza 1 - α ha estremi:

$$\left.\begin{cases} L_1 = \overline{X} - t_{n-1;\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n} \\ L_2 = \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n} \end{cases}\right\} \text{STIMATORE}$$

Poiché la numerosità campionaria è n=16, la media campionaria studentizzata ha una distribuzione *t* di Student con 15 gradi di libertà. Per costruire l'intervallo di confidenza è necessario determinare il valore $t_{15,0,005}$ tale che la v.c. t_{15} assuma valori maggiori con probabilità $\alpha/2$= 0,005. Dalle tavole risulta $t_{15,0,005}$ = 2,947, pertanto la stima per intervallo sarà:

$$\begin{cases} l_1 = 3{,}42 - 2{,}947 \cdot 0{,}68 / \sqrt{16} = 2{,}91 \\ l_2 = 3{,}42 + 2{,}947 \cdot 0{,}68 / \sqrt{16} = 3{,}92 \end{cases}$$

Il tempo medio per la perdita di peso del metallo è compreso tra 2,91e 3,92 grammi, al livello di confidenza del 99%.

Esercizio n 3

Una società telefonica vuole stimare il tempo medio che intercorre fra il momento nel quale sono segnalati i guasti e quello in cui avviene la riparazione. Si assume che itempi si distribuiscono in modo normale. In un campione casuale di 16 richieste di assistenza, la media è risultata $\bar{x} = 47$ e lo scarto quadratico medio è risultato $\hat{\sigma} = 12$. Si vuole costruire un intervallo di confidenza al 95%.

Soluzione

Lo stimatore per intervallo della media di una popolazione normale, con varianza incognita, al livello di confidenza 1 - α ha estremi:

$$\left.\begin{cases} L_1 = \overline{X} - t_{n-1;\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n} \\ L_2 = \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n} \end{cases}\right\} \text{STIMATORE}$$

Poiché la numerosità campionaria è n=16, la media campionaria studentizzata ha una distribuzione *t* di Student con 15 gradi di libertà. Per costruire l'intervallo di confidenza è necessario determinare il valore $t_{15,0,025}$ tale che la v.c. t_{15} assuma valori maggiori con probabilità $\alpha/2$= 0,025. Dalle tavole risulta $t_{15,0,025}$ = 2,131, pertanto la stima per intervallo sarà:

$$\begin{cases} l_1 = 47 - 2{,}131 \cdot 12 / \sqrt{16} = 40{,}61 \\ l_2 = 47 + 2{,}131 \cdot 12 / \sqrt{16} = 53{,}39 \end{cases}$$

Il tempo medio per le riparazioni è compreso tra (40,61; 53,39) minuti, al livello di confidenza del 95%.

Esercizio n 4

Dai risultati di un sondaggio effettuato su 100 votanti `e emerso che il 55% di essi ha scelto il candidato A.

- Si calcolino i limiti di confidenza al 95%.
- Qual'`e l'ampiezza del campione da scegliere per essere confidenti al 99% che il candidato A vinca le elezioni?

Svolgimento

- Si calcolino i limiti di confidenza al 95%.

Per stimare la proporzione p di elettori di A relativa alla popolazione si utilizza la proporzione campionaria P = 0.55. I limiti dell'intervallo di confidenza sono

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right) = 1-\alpha$$

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0{,}55 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55 \times 0{,}45}{100}} = 0{,}55 \pm 0{,}1$$

$$\pi[0{,}45;0{,}65]$$

Pertanto si può essere confidenti al 95% che la proporzione di votanti il candidato A nella popolazione sia compresa tra 0.45 e 0.65.

Esercizio n 5

Si dispone di un campione casuale costituito da n = 500 assemblaggi; di questi un numero x = 10 presenta dei difetti. Si determini un intervallo di confidenza al 95% per la probabilità di successo π incognita.

Svolgimento:

$$N = 500$$

$$p = \frac{10}{500} = 0{,}02$$

$$1 - p = 0{,}98$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$\alpha/2 = 0{,}025$$

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right) = 1-\alpha$$

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0{,}02 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{500}} = 0{,}02 \pm 0{,}0123$$

$$\pi[0{,}0077;0{,}0323]$$