# Esercitazione 1 del corso di Statistica 2

***Prof. Domenico Vistocco***

Dott.ssa Paola Costantini

5 maggio 2008

## Esercizio n. 1

Supponiamo di avere un'urna contenente 12 palline, di cui 5 verdi, 3 blu e 4 rosse. Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione di tre palline dall'urna, costruire le variabili casuali:
X: n. di palline blu estratte (estrazione con ripetizione)
Y: n. di palline verdi estratte (estrazione con ripetizione)
Z: n. di palline blu estratte (estrazione senza ripetizione)

X: n. palline blu estratte (con ripetizione)

| Spazio degli eventi | $x_i$ | $p_i$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|
| $(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$ | 0 | 0,4218 | 0,4218 |
| $(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$ | 1 | 0,4218 (0,14*3) | 0,8436 |
| $(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3})$ | | | |
| $(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)$ | | | |
| $(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)$ | 2 | 0,14 (0,047*3) | 0,9836 |
| $(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)$ | | | |
| $(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$ | | | |
| $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ | 3 | 0,0157 | 1 |

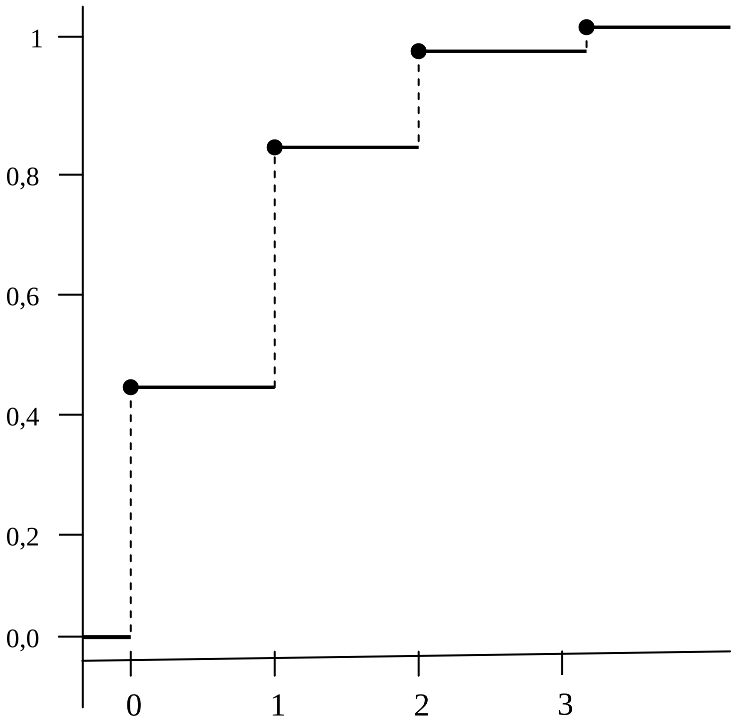
$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{9}{12} = 0{,}4218$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}1406 \text{ (1° caso)}$$

$$\frac{9}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}1406 \quad \text{(1° caso)}$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}0157$$

Rappresentazione della *Funzione di ripartizione*




F(x)=0, per x < 0
F(x)=0,4218 per 0 ≤ x ≤ 1
F(x)=0,8436 per 1 ≤ x ≤ 2
F(x)=0,9836 per 2 ≤ x ≤ 3
F(x)=1 per x ≥ 3

Y: n. palline verdi estratte (con ripetizione)

| Spazio degli eventi | $x_i$ | $p_i$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|
| $(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap \overline{V}_3)$ | 0 | 0,198 | 0,198 |
| $(V_1 \cap \overline{V}_2 \cap \overline{V}_3)$ | 1 | 0,425 (0,142*3) | 0,623 |
| $(\overline{V}_1 \cap V_2 \cap \overline{V}_3)$ | | | |
| $(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \cap V_3)$ | | | |
| $(\overline{V}_1 \cap V_2 \cap V_3)$ | 2 | 0,303 (0,101*3) | 0,9263 |
| $(V_1 \cap \overline{V}_2 \cap V_3)$ | | | |
| $(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V}_3$ | | | |
| $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ | 3 | 0,072 | 1 |

$= \frac{7}{12} * \frac{7}{12} * \frac{7}{12} = 0,198$

$= \frac{7}{12} * \frac{7}{12} * \frac{5}{12} = 0,1417$ (1° caso)

$= \frac{7}{12} * \frac{5}{12} * \frac{5}{12} = 0,1012$ (1° caso)

$= \frac{5}{12} * \frac{5}{12} * \frac{5}{12} = 0,0723$

F(x)=0 per x < 0
F(x)=0,198 per 0 ≤ x ≤ 1
F(x)=0,623 per 1 ≤ x ≤ 2
F(x)=0,926 per 2 ≤ x ≤ 3
F(x)=1 per x ≥ 3

Z: n. palline blu estratte (senza ripetizione)

| Spazio degli eventi | $x_i$ | $p_i$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|
| $(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$ | 0 | 0,3818 | 0,3818 |
| $(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$ | 1 | 0,49 (0,163*3) | 0,8718 |
| $(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3})$ | | | |
| $(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)$ | | | |
| $(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)$ | 2 | 0,123 (0,041*3) | 0,9946 |
| $(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)$ | | | |
| $(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$ | | | |
| $(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ | 3 | 0,0045 | 1 |

$$= \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * \frac{7}{10} = 0{,}3818$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * \frac{3}{10} = 0{,}1636 \text{ (1° caso)}$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} = 0{,}1406 \text{ (1° caso)}$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} = 0{,}0157$$

| | |
|---|---|
| F(x)=0 | per $x < 0$ |
| F(x)=0,3818 | per $0 \le x \le 1$ |
| F(x)=0,8718 | per $1 \le x \le 2$ |
| F(x)=0,9946 | per $2 \le x \le 3$ |
| F(x)=1 | per $x \ge 3$ |

Ora, invece, a partire dalla stessa urna, consideriamo l'esperimento" estrazione di 4 palline rosse (con ripetizione). Costruiamo la variabile casuale N:

N: n. palline rosse estratte (con ripetizione)

| Spazio degli eventi | $x_i$ | $p_i$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|
| $(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap \overline{R_4})$ | 0 | 0,198 | 0,198 |
| $(R_1 \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap \overline{R_4})$ | 1 | 0,395 (0,098*4) | 0,593 |
| $(\overline{R_1} \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap \overline{R_4})$ | | | |
| $(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap \overline{R_4})$ | | | |
| $(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap R_4)$ | | | |
| $(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap \overline{R_4})$ | 2 | 0,296 (0,049*6) | 0,889 |
| $(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap \overline{R_4})$ | | | |
| $(R_1 \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap R_4)$ | | | |

$$= \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}198$$

$$\frac{4}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}098 = \text{(1° caso)}$$

$$\frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}049 \text{ (1° caso)}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4})$ | 2 | 0,296 (0,049*6) | 0,889 |
| $(\overline{R}_1 \cap R_2 \cap \overline{R}_3 \cap R_4)$ | | | |
| $(\overline{R}_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4)$ | | | |
| $(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4})$ | 3 | 0,098 (0,027*4) | 0,987 |
| $(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4)$ | | | |
| $(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4)$ | | | |
| $(\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$ | | | |
| $(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$ | 4 | 0,0123 | 1 |

$$\frac{8}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}049 \text{ (4° caso)}$$

$$\frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{8}{12} = 0{,}027 \text{ (1° caso)}$$

$$\frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} = 0{,}0123$$

| | |
|---|---|
| F(x)=0 | per $x < 0$ |
| F(x)=0,198 | per $0 \le x \le 1$ |
| F(x)=0,593 | per $1 \le x \le 2$ |
| F(x)=0,889 | per $2 \le x \le 3$ |
| F(x)=0,987 | per $3 \le x \le 4$ |
| F(x)=1 | per $x \ge 4$ |

## Esercizio n. 2

Un venditore di elettrodomestici a domicilio sa che in ogni visita la probabilità che riesca a convincere il cliente ad acquistare un elettrodomestico è 0,35. L'esito di ogni visita è indipendente da quello delle altre. Il venditore ha programmato 5 visite; si vuole calcolare la distribuzione di probabilità del numero di elettrodomestici che riesce a vendere. Sia X la v.c. che descrive questo esperimento, abbiamo che X ha una distribuzione binomiale con n=5 e p=0,35 cioè:

$$X \sim Bin(5;0{,}35)$$

La funzione di probabilità è data da:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

Da cui

$$P(X = 0) = \frac{5!}{0!5!} 0{,}35^0 (1-0{,}35)^5 = 0{,}116$$

$$P(X=1)=\frac{5!}{1!4!}0{,}35^1(1-0{,}35)^4=0{,}312$$

$$P(X=2)=\frac{5!}{2!3!}0{,}35^2(1-0{,}35)^3=0{,}337$$

$$P(X=3)=\frac{5!}{3!2!}0{,}35^3(1-0{,}35)^2=0{,}181$$

$$P(X=4)=\frac{5!}{4!1!}0{,}35^4(1-0{,}35)^1=0{,}049$$

$$P(X=5)=\frac{5!}{5!0!}0{,}35^5(1-0{,}35)^0=0{,}005$$

Si vuole inoltre calcolare in media quanti elettrodomestici il venditore si aspetta di vendere.

Il valore atteso di una variabile Binomiale è dato da: $E[X] = n*p$, per cui nel nostro caso abbiamo:

$$E[X] = 5*0{,}35=1{,}75$$

Infine si vuole calcolare la probabilità che il venditore venda almeno un elettrodomestico. Per calcolare la probabilità dell'evento $P(X\geq 1)$=si osservi che $P(X=0)$ è la sua negazione. Il modo più rapido per calcolare la probabilità desiderata è:

$P(X\geq 1)= 1-P(X=0)$

Sapendo che $P(X=0)=0{,}116$ di conseguenza abbiamo che $P(X\geq 1)= 1-0{,}116=0{,}884$

## Esercizio n. 3

Una società di esplorazione di gas naturale scopre in media 4 giacimenti di gas per ogni 100 trivellazioni eseguite. L'esito di ciascuna trivellazione è indipendente dalle altre. Si eseguono 20 trivellazioni:

a. Qual è la probabilità che si scopre un giacimento?
b. Qual è la probabilità che si scopra al massimo un giacimento?
c. Qual è la probabilità che si scoprano almeno due giacimenti?
d. Quali sono il numero medio e la varianza di giacimenti scoperti in 20 trivellazioni?

Soluzione

In questo caso abbiamo che n=20 e p=4/100=0,04

a. P(X=1)= $\frac{20!}{1!19!} * 0{,}04^1(1-0{,}04)^{19} = 20 \times 0{,}04(0{,}96)^{19} = 0{,}368$

b. Probabilità che si scopra al massimo un giacimento = P(X=0)+ P(X=1)

da cui P(X=0) = $\frac{20!}{0!20!} * 0{,}04^0(1-0{,}04)^{20} = 0{,}44$

e sapendo che P(X=1) = 0,368 abbiamo che P(X=0)+ P(X=1) = 0,44+0,368=0,810

c. Almeno due giacimenti = P(X $\geq$ 2) = 1 - P(X=0)+ P(X=1) = 1-0,810 = 0,19

d. Valore atteso E[X]= n*p = 20*0,04= 0,80 Var(X)=n*p(1-p) = 20*0,04(0,96) = 1,1375

per cui per ogni 4 trivellazioni ci si attende di scoprire 0,80 giacimenti, con un a varianza di 1,1375.

## Esercizio n. 4

Un'azienda produttrice di automobili offre ai suoi clienti un servizio di soccorso stradale. La probabilità che in un'ora vi sia una richiesta di aiuto è 0,33. Le richieste di soccorso sono tra di loro indipendenti.

a. Qual è la probabilità che la prima richiesta di soccorso si verifichi nella seconda ora?
b. Qual è la probabilità che la prima richiesta di soccorso si verifichi dopo la prima ora?
c. Qual è il numero medio di ore necessarie affinché vi sia la prima richiesta di soccorso?

Soluzione

In questo caso X~G(0,33)

La funzione di probabilità della v.c. geometrica X è data da:

$P(X = x) = (1-\pi)^{x-1}\pi$

a. P(X=2) = (1-0,33)$^{(2-1)}$ * 0,33 =0,221

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=1) \rightarrow P(X=1) = (1-0{,}33)^{(1-1)} * 0{,}33 = 0{,}33$
Per cui $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

c. Il valore atteso di una v.c. geometrica è pari a $E[X] = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}33} = 3{,}030$