Esercitazione 2 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

04 Maggio 2012

Esercizio n 1

Determinare la probabilità che in lanci successivi di un dado non truccato il 3 si verifichi per la prima volta al quinto lancio.

Soluzione

Si utilizza la v.c. geometrica come modello pe ril numero di prove necessarie ad ottenere il primo successo in uno schema binomiale.

$$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$$

P=1/6   n=5

$$P(X=5)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{7776}=0{,}080$$

Esercizio n 2

Un'urna contiene 4 palline rosse e 6 blu. Si scelga una pallina, la si osservi ma non la si rimetta nell'urna. Determinare la probabilità di ottenere in questo modo 3 palline blu in 5 estrazioni.

Soluzione

Si utilizza la v.c. ipergeometrica come modello per il numero di succcessi in n prove nel caso di estrazione senza ripetizione.

$$X \sim \mathrm{IP}(N;F;n)$$

La probabilità che X assuma valore x si calcola come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
++

$$P(X=x)=\frac{\binom{F}{x}\binom{N-F}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{F!}{x!(F-x)!}\frac{(N-F)!}{(n-x)!(N-F-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

F=6   N=10   n=5

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\binom{10-6}{5-3}}{\binom{10}{5}}=\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{\frac{6!}{3!(6-3)!}\frac{(10-6)!}{2!(10-6-5+3)!}}{\frac{10!}{5!(10-5)!}}=0{,}476$$

Esercizio n 3

Per assemblare un sistema si prendono a caso 6 componenti da un acassa contenente 20 componenti usati. Il sistema montato funziona solo se tra i 6 componenti impiegati, quelli guasti non sono più di 2. Se nella cassa vi erano 15 componenti efficienti e 5 guasti, qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Soluzione

Si utilizza la v.c. ipergeometrica come modello per il numero di successi in n prove nel caso di estrazione senza ripetizione.

F=15 N=20 n=6

$$P(X\geq 4)=\sum_{i=4}^{6}P(x=i)\frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2}}{\binom{20}{6}}+\frac{\binom{15}{5}\binom{5}{1}}{\binom{20}{6}}+\frac{\binom{15}{6}\binom{5}{0}}{\binom{20}{6}}=$$

$$\frac{\frac{15!}{4!(15-4)!}\frac{5!}{2!(20-15-6+4)!}}{\frac{20!}{6!(20-6)!}}+\frac{\frac{15!}{5!(15-5)!}\frac{5!}{1!(20-15-6+5)!}}{\frac{20!}{6!(20-6)!}}+\frac{\frac{15!}{6!(15-6)!}\frac{5!}{0!(20-15-6+6)!}}{\frac{20!}{6!(20-6)!}}=$$

=0,8687

Esercizio n 4

Da informazioni fornite dalla società “Autostrade” risulta che, durante i fine settimana, si verificano 8 incidenti automobilistici mortali ogni ora. Assumendo che tali incidenti avvengano indipendentemente gli uni dagli altri, calcolare la probabilità:

a) Che trascorra un’ora senza incidenti;
b) Che trascorrano 15 minuti con un solo incidente;
c) Che si abbiano 4 incidenti in un’ora.

Soluzione

a) λ=8

$$P(X=0)=\frac{8^0\cdot e^{-8}}{0!}=\frac{1}{2{,}7^8}=0{,}0003$$

b) λ=2

$$P(X=1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=\frac{2}{2{,}7^8}=0{,}2743$$

c) λ=8

$$P(X=4)=\frac{8^4\cdot e^{-8}}{4!}=0{,}0604$$

Esercizio n. 5

Un esercizio commerciale riceve in media 1,2 telefonate al minuto. Attualmente il negozio dispone di un'unica linea telefonica:

a) calcolare il tasso medio di chiamate ricevute in 10 minuti;
b) calcolare la probabilità che in 5 minuti il negozio riceva almeno una telefonata.

Soluzione

a) tasso medio di chiamate in 10 minuti = λ*t = 1,2*10=12
b) λ =5*1,2=6

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}=1-0{,}002=0{,}998$$

Esercizio n. 6

Supponendo che la media dei redditi dichiarati da un gruppo di famiglie sia di 25.000 euro in un dato anno e supponendo che lo scarto quadratico medio sia di 5.000 euro, qual è la probabilità che una famiglia scelta a caso abbia un reddito compreso tra 10.000 e 40.000 euro?

Ricorriamo alla disuguaglianza di Chebyshev, la quale afferma che preso un qualsiasi campione di dati e calcolato il parametro K, con valore K > 1, conoscendo la varianza del fenomeno e senza alcuna informazione sulla forma della distribuzione, almeno una frazione pari a $1-\frac{1}{K^2}$ dei dati cade nell'intervallo $\bar{x}\pm\sigma_x K$

I nostri dati sono: $\mu_x=25.000$ $\quad\sigma_x=5.000$ $\quad\varepsilon=40.000-\mu_x=\mu_x-10.000=15.000$

Definito $K = \frac{\varepsilon}{\sigma_x} = 3$, cioè come il rapporto tra il termine di errore e lo scarto quadratico medio, la proporzione di famiglie il cui reddito è compreso tra 40.000 e 10.000 euro è:

$$P\left[|X - \mu| \leq K\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{K^2} = 1 - \frac{1}{9} = 0{,}89$$

Esercizio 6

La probabilità che una persona ospite di un famoso centro di benessere sia soddisfatta del trattamento ricevuto è pari a 0,9. Si intervistano a caso 5000 persone e si chiede loro cosa ne pensano del trattamento ricevuto. Determinare la probabilità che ci siano almeno 440 soggetti dichiaratio soddisfatti.

Soluzione

Grazie al Teorema di De Moivre-Laplace è possibile approssimare la Binomiale alla variabile casuale Normale e di conseguenza alla v.c. Normale Standardizzata.
Poiché la variabile casuale Binomiale ha valore atteso pari a

E(X) =n*p =500*0,9 =450

E varianza

Var (X) = n*p*(1-p) =45

Possiamo procedere all'operazione di standardizzazione.

Quindi P(X > 440 + 0,5)

Si aggiunge 0,5 poiché i valori della binomiale sono discreti, mentre quelli della normale sono continui).

$$Z = \left(\frac{440{,}5 - 450}{\sqrt{45}} \right) = -1{,}416$$

P(Z> -1,416) è 0,9207