Esercitazione 4 del corso di Statistica (parte seconda)

Dott.ssa Paola Costantini

4 Febbraio 2009

Esercizio n. 1

Lanciando tre monete, si consideri la v.c. descritta dal numero delle teste che si presentano in una prova.

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
CCC	0	1/8	1/8
CCT	1	3/8	4/8
CTC			
TCC			
TTC	2	3/8	7/8
TCT			
CTT			
TTT	3	1/8	1

Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Applicando la formula del valore atteso: $\mu = E[X] = \sum_i x_i p_i$ abbiamo:

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$ per cui in una prova il numero atteso di "teste" è pari a 1,5.

Var(X) $= \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i =$

$$(0-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 + (1-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (2-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (3-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 = 0{,}75$$

Solitamente σ risulta un indice di variabilità più conveniente da utilizzare perché è espresso nella stessa unità di X.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$$

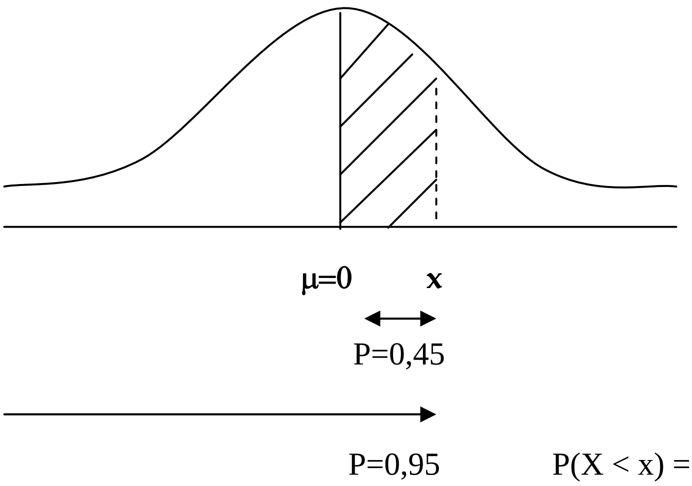
Il numero di "teste" che si presenta in ciascun lancio è diverso da quello atteso (1,5) mediamente per 0,866 teste.

L'esercizio può anche esse svolto facendo ricorso alla v.c. binomiale
Supponiamo che X~Bin(n; p) e nel nostro caso X~Bin(3; 0,5)

$$E[X] = n \cdot p = 1{,}5$$
$$Var[X] = n \cdot p(1-p) = 3 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5) = 0{,}75$$

Esercizio n. 2

X~N(0;4). Trovare il valore della *x* tale che P(0<X<x)=0,45



P(X < x) = 0,95

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 95% della Probabilità.

La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95$

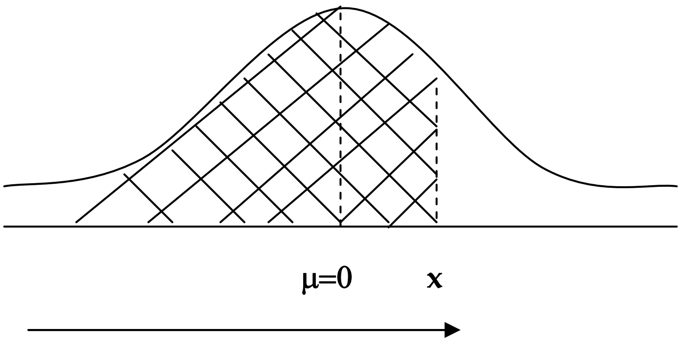
$P(Z < z) = 0{,}95 \quad z = 1{,}645 = (1{,}64 + 1{,}65)/2$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}645 \rightarrow \frac{x-0}{\sqrt{4}} = 1{,}645 \rightarrow$

$\rightarrow (x = z\sigma + \mu) \rightarrow x = 2 * 1{,}645 = 3{,}29$

Esercizio n. 3

X~N(2;1). Trovare il valore della *x* tale che P(X<x)=0,90



P=0,90 P(X < x) = 0,90

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 90% della Probabilità.

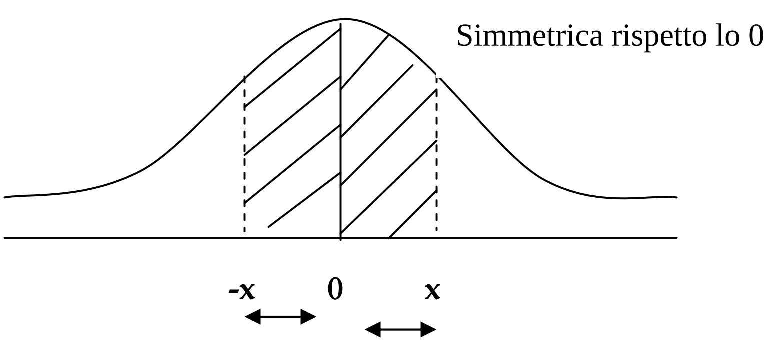
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

$P(Z < z) = 0{,}90 \quad z = 1{,}285 = (1{,}28 + 1{,}29)/2$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}285 \rightarrow \frac{x-2}{1} = 1{,}285 \rightarrow x = 2 + 1{,}285 = 3{,}285$

Esercizio n. 4

X~N(0;1). Trovare il valore della *x* tale che P(-x<X<x)=0, 5



La probabilità cumulata fino al valore x = P(X < x) = 0,75

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 75% della Probabilità.

La nostra X~N ed è standardizzata, per cui:

$P(Z < z) = 0{,}75 \quad z = 0{,}675 = (0{,}67 + 0{,}68)/2$

z = 0,675 $\longrightarrow$ P(0,75) è il 3°Quartile.

Esercizio n. 5

Il diametro in millimetri dei bulloni prodotti da un'azienda ha una distribuzione normale con media 12 e scarto quadratico medio 0,15. Si vuole calcolare che il diametro sia compreso tra 11,8 e 12,1 millimetri. Sia X la variabile casuale che descrive il diametro dei bulloni:

$$X \sim N(12;\ 0{,}15^2)$$

Soluzione

La probabilità che X assuma valori nell'intervallo (11,8; 12,1) è data da:

$P(11{,}8 \leq Z \leq 12{,}1) =$

$$P\left(\frac{11{,}8-12{,}0}{0{,}15} \leq Z \leq \frac{12{,}1-12{,}0}{0{,}15}\right) = P(-1{,}33 \leq z \leq 0{,}67) = \phi(0{,}67) - \phi(-1{,}33) = \phi(0{,}67) - \left[1 - \phi(1{,}33)\right] =$$
$$= 0{,}7486 - (1 - 0{,}9082) = 0{,}6568$$

Oppure $\phi(0{,}67) - \phi(0) + \phi(1{,}33) - \phi(0) = (0{,}7486 - 0{,}5) + (0{,}9082 - 0{,}5) = 0{,}2486 + 0{,}4082 = 0{,}6568$

Oppure $\phi(0{,}67) + \phi(1{,}33) - 1 = 0{,}7486 + 0{,}9082 - 1 = 0{,}6568$