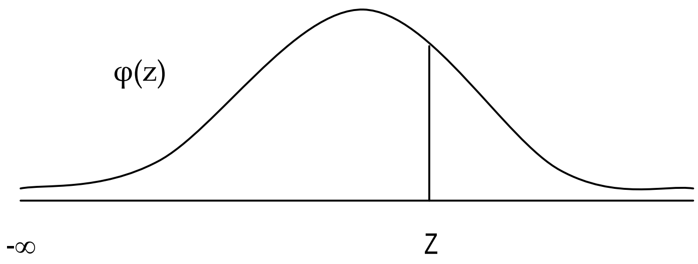
Esercitazione 3 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

1 Febbraio 2012

ESERCIZI SULLA V.C. NORMALE

φ(z) = P(Z≤z) con Z~N(0,1)

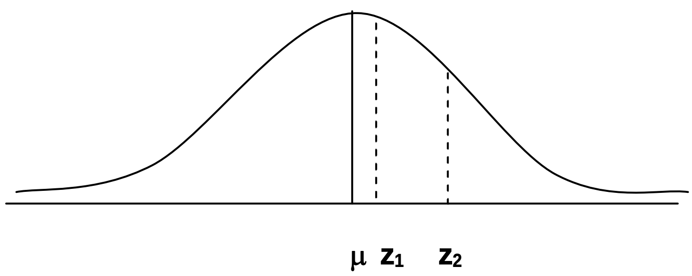


Calcolare:

P(Z ≤ 0,99) = φ(0,99) = 0,8389

P(Z ≤ 1,36) = φ(1,36) = 0,9131

IN UN QUALSIASI INTERVALLO



Calcolare

P(0,5 <Z<1) φ (1) = 0,8413

φ (0,5) = 0,6914

φ (1)- φ (0,5)

P(0,6914<Z<0,8413) = P(0,8413-0,6914) = 0,1499 ≅ **15%**

Calcolare:

$P(0,63 < Z < 1,77)$ $\varphi\ (1,77) = 0,9616$

$\varphi\ (0,63) = 0,7357$

$\varphi\ (1,77) - \varphi\ (0,63)$

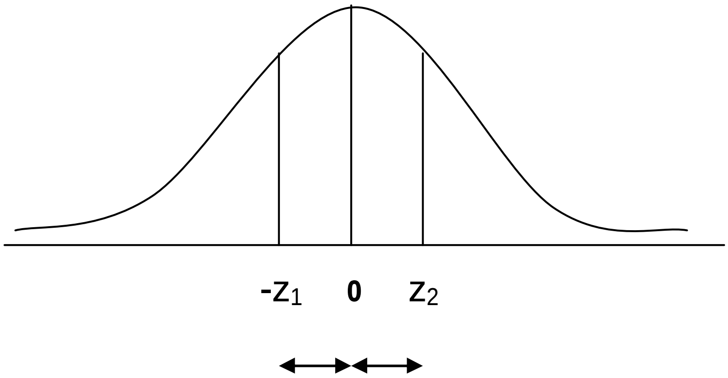
$P(0,7357 < Z < 0,9616) = P(0,9616 - 0,7357 = 0,2259 \cong$ **22%**

L'INTERVALLO E' A CAVALLO DI μ

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$

$P(z_1 < Z < z_2) = P(z_1 < Z < 0) + P(0 < Z < z_2)$

$= \varphi\ (-z_1) + \varphi\ (z_2) - 1$



Calcolare:

$P(-1,1 < Z < 0,35)$ $\varphi\ (1,1) = 0,8643$

$\varphi\ (0,35) = 0,6368$

$\varphi\ (0) = 0,5$

$P(-1,1 < Z < 0,35) = (0,6368 + 0,8643) - 1 =$ **0,5**

Calcolare:

$P(-1,74 < Z < 0,11)$ $\varphi\ (0,11) = 0,5438$

$\varphi\ (1,74) = 0,9590$

$\varphi\ (0) = 0,5$

$P(-1,74 < Z < 0,11) = (0,9590+0,5438)-1 = \mathbf{0,5028}$

INTERVALLI NEGATIVI

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$ con z_1 e z_2 negativi

Ribalto l'area $[-z_1, -z_2]$ dall'altra parte dell'asse per la SIMMETRIA della curva

$$P(z_1 < z < z_2) = P(-z_2 < z < -z_1)$$

Calcolare:

$P(-0,93 < Z < -0,8) = P(0,8 < Z < 0,93)$

$\varphi(0,8) = 0,7881$

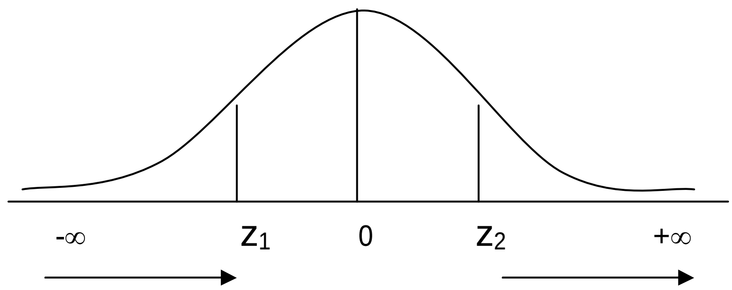
$\varphi(0,93) = 0,8238$

$P(0,8 < Z < 0,93) = \varphi(0,93) - \varphi(0,8) = (0,8238-0,7881) = 0,0357$

INTERVALLI SULLE CODE

$(-\infty$ ad $z_1)$ indica la CODA SINISTRA: $1 - \varphi(z_1)$

$(z_2$ ad $+\infty)$ indica la CODA DESTRA: $1 - \varphi(z_2)$



Calcolare

$P(Z>1,3)$ $\varphi(1,3) = 0,9032$

$P(Z>1,3) = 1 - 0,9032 = \mathbf{0,0968} \cong \mathbf{10\%}$

Calcolare

$P(Z<2,325)$ $\varphi(2,325)$ = punto medio tra $\varphi(2,32)$ e $\varphi(2,33)$

$\varphi(2,32) = 0,9898$

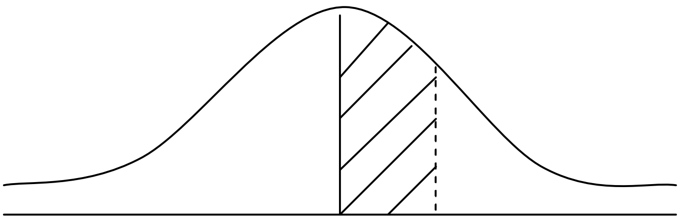
$\varphi(2,33) = 0,9901$

φ (2,325) = $\frac{0,9898+0,9901}{2} = 0.9899$

P(Z<2,325) = 0,9899 ≅ **99%**

Esercizio n 1

X~N(0;4). Trovare il valore di della *x* tale che P(0<X<x)=0,45



μ=0 **x**

P=0,45

P=0,95 P(X < x) = 0,95

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 95% della Probabilità.

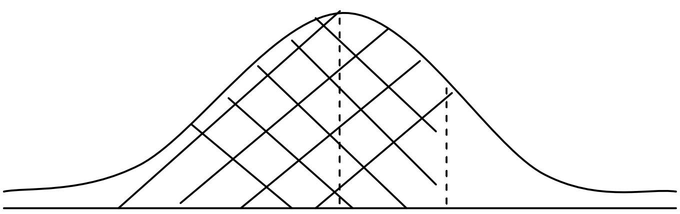
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0,95$

$$P(Z < z) = 0,95 \quad z = 01,645 = (1,64 + 1,65/2)$$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1,645 \rightarrow \frac{x-0}{\sqrt{4}} = 1,645 \rightarrow x = 2 * 1,645 = 3,29$

Esercizio n 2

X~N(2;1). Trovare il valore di della *x* tale che P(X<x)=0,90



μ=0 **x**

P=0,90 P(X < x) = 0,90

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 90% della Probabilità.

La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

$P(Z < z) = 0{,}90 \quad z = 1{,}285 = (1{,}28 + 1{,}29/2)$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}285 \rightarrow \frac{x-2}{1} = 1{,}285 \rightarrow x = 2 + 1{,}285 = 3{,}285$

Esercizio n 3

X~N(2;9) Calcolare P(0,412<X<3,12)

P (0,412<X<3,12) = P $(\frac{0{,}412-2}{3} < Z < \frac{3{,}12-3}{3})$ = P (-0,53 < Z < 0,38) abbiamo un estremo negativo e uno positivo

= φ (0,53) + φ (0,38) -1 = P(0,7019) + P(0,6480) – 1 = **0,35**

X~N(0;4) Calcolare P(X>4,66)

P(X>4,66) = P $(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-\mu}{\sigma}) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-0}{2})$

P(Z>2,33) = F(2,33) = 0,9901

P(Z>2,33) = 1-0,9901 = **0,01** ≅ **1%**

Esercizio n 4

Il diametro in millimetri dei bulloni prodotti da un'azienda ha una distribuzione normale con media 12 e scarto quadratico medio 0,15. Si vuole calcolare che il diametro sia compreso tra 11,8 e 12,1 millimetri. Sia X la variabile casuale che descrive il diametro dei bulloni:

X~N(12; $0{,}15^2$)

Soluzione

La probabilità che X assuma valori nell'intervallo (11,8; 12,1) è data da:

P(11,8 ≤ Z ≤ 12,1) =

$$P\left(\frac{11{,}8-12{,}0}{0{,}15} \le Z \le \frac{12{,}1-12{,}0}{0{,}15}\right) = P(-1{,}33 \le z \le 0{,}67) = \phi(0{,}67) - \phi(-1{,}33) = \phi(0{,}67) - [1-\phi(1{,}33)] =$$
$$= 0{,}7486 - (1-0{,}9082) = 0{,}6568$$

Oppure $\phi(0{,}67) - \phi(0) + \phi(1{,}33) - \phi(0) = (0{,}7486 - 0{,}5) + (0{,}9082 - 0{,}5) = 0{,}2486 + 0{,}4082 = 0{,}6568$

Oppure $\phi(0,67)+\phi(1,33)-1=0,7486+0,9082-1=0,6568$

Esercizio n 5

Il percorso in km che un'utilitaria compie con un litro di carburante ha una distribuzione Normale con media 25 e scarto quadratico medio 3. Determinare la probabilità che:

a) percorra più di 27 km;
b) percorra meno di 21 km;
c) il percorso sia compreso fra 21 e 27 km.

Soluzione

a) $P(X \geq 27) = P\left(Z \geq \frac{27-25}{3}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1-\phi(0,67) = 1-0,7486 = 0,2514$

b) $P(X \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21-25}{3}\right) = P(Z \geq -1,33) = 1-\phi(1,33) = 1-0,9082 = 0,0918$

$c) P(21 \leq X \leq 27) = P\left(\frac{21-25}{3} \leq Z \leq \frac{27-25}{3}\right) = P(-1,33 \leq Z \geq 0,67) = \phi(1,33)+\phi(0,67)-1 = 0,7486$
$+0,9082-1 = 0,6568$

Esercizio 6

Considerando la seguente popolazione di famiglie secondo il numero dei componenti "giovani" (X, di età inferiore a 21 anni) e "adulti" (Y, di età non inferiore a 21 anni).

Tabella 1.

X \ Y	1	2	3	Tot.
0	20	90	0	110
1	15	190	15	220
2	5	240	135	380
3	0	80	50	130
	40	600	200	840

a. Costruire la corrispondente funzione di probabilità congiunta delle v.c. X e Y e determinare: *E*(*X*), *E*(*Y*), *E*(*X***Y*), Var (*X*), Var (*Y*), Cov(*X*,*Y*), ρ;

Tabella 2.

Y / X	1	2	3	Tot.
0	0,024	0,107	-	0,131
1	0,018	0,226	0,018	0,262
2	0,006	0,286	0,161	0,453
3	-	0,095	0,059	0,154
	0,048	0,714	0,238	1

Il Valore atteso della componente *X* è dato da:

$E(X) = \sum_{i=1}^{h} x_i p_i$ = 0*0,131+1*0,262+2*0,453+3*0,154 = 1,63

Il Valore atteso della componente *Y* è dato da:

$E(Y) = \sum_{j=1}^{k} y_j p_i$ 1*0,048+2*0,714+3*0,238= 2,19

E(X,Y) = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j p_{ij}$ = 0*1*0,024+0*2*0,107+1*1*0,018+1*2*0,226+…..+3*3*0,059 = 3,747.

Le varianze delle componenti (X) e (Y) sono date da:

Var(X)= $E(X)^2 - (\mu_x{}^2)$ e Var(Y)= $E(Y)^2 - (\mu_y{}^2)$

$Ex^2 = \sum_{i=1}^{h} x_i^2 p_i$ =0*0,131+1*0,262+4*0,453+9*0,154 = 3,46

$(\mu_x)^2$= $1{,}63^2$= 2,65

Var(X)=3,46-2,65=0,81

$Ey^2 = \sum_{j=1}^{k} y_i^2 p_j$ = 1*0,048+4*0,714+9*0,238= 5,046

$(\mu_y)^2$= $2{,}19^2$= 4,8

Var(Y)=5,046-4,8=0,246

$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$ = 3,747-1,63*2,19=0,1773

$\rho = \frac{Cov(X,Y}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \frac{0{,}1773}{0{,}446}$ =0,397