Università degli Studi di Cassino

Esercitazione di Statistica 2 del 25.01.2007

Dott.ssa Simona Balzano

Esercizio 1

La temperatura dell'acqua di un lago durante l'anno si distribuisce normalmente con media μ = 10 °C e scarto quadratico medio σ = 4 °C:

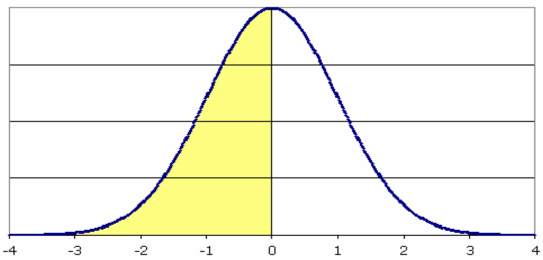
$$X \sim N(10, 16)$$

Misurando la temperatura un giorno a caso:

a) Qual è la probabilità che sia minore o uguale a 10?
b) Qual è la probabilità che sia maggiore di 12?
c) Qual è la probabilità che sia compresa tra 10 e 12?
d) Qual è la probabilità che sia compresa tra 6 e 12?
e) Qual è la probabilità che sia compresa tra 4 e 6?
f) Quante volte in 1 anno si registra una temperatura maggiore di 18?

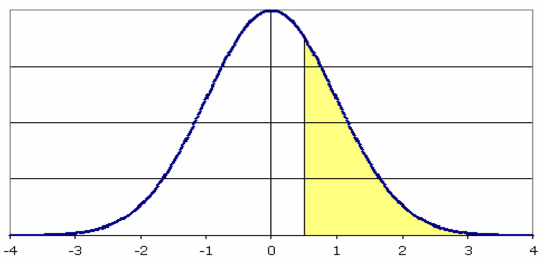
Soluzione

a) $P(X \leq 10) =$ **0,5**



b) $P(X > 12)$

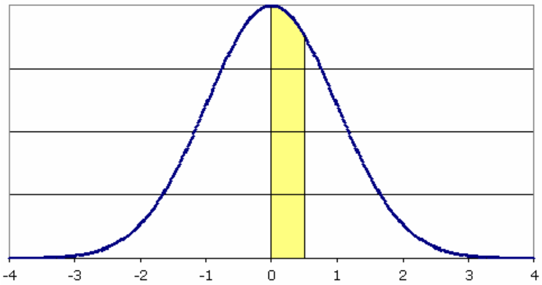
$$z_{12} = \frac{12-10}{4} = 0,5$$



$P(X > 12) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 =$ **0,3085**

c) P (10 ≤ X ≤ 12)

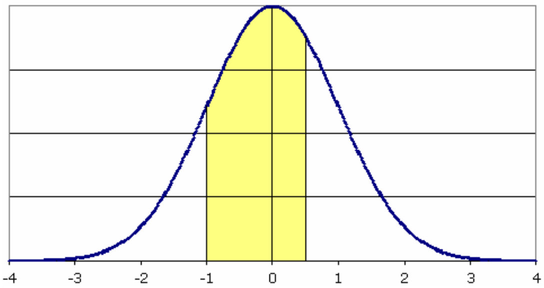
$$z_{12} = \frac{12-10}{4} = 0,5$$



P (10 ≤ X ≤ 12) = P (0 ≤ Z ≤ 0,5) = P(Z ≤ 0,5) – P(Z ≤ 0) = 0,6915 – 0,5 = **0,1915**

d) P (6 ≤ X ≤ 12)

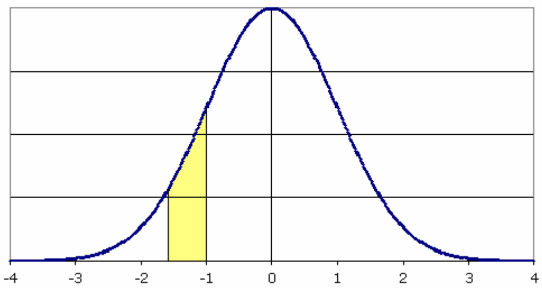
$$z_6 = \frac{6-10}{4} = -1\,; \qquad z_{12} = \frac{12-10}{4} = 0,5$$



P (6 ≤ X ≤ 12) = P (-1 ≤ Z ≤ 0,5) = P(Z ≤ 0,5) – P(Z ≤ -1) =
= P(Z ≤ 0,5) – [1 – P(Z ≤ 1)] = 0,6915 – (1 – 0,8413) = **0,5328**

e) P (4 ≤ X ≤ 6)

$$z_4 = \frac{4-10}{4} = -1,5\,; \qquad z_6 = \frac{6-10}{4} = -1$$

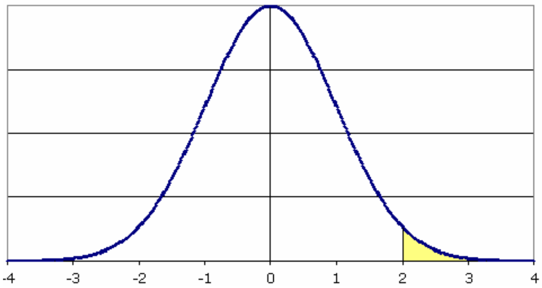


P (4 ≤ X ≤ 6) = P (-1,5 ≤ X ≤ -1) = P (Z ≤ 1,5) – P (Z ≤ 1) = 0,9332 – 0,8413 = **0,0918**

f)

$N_{18} = 365 \times P(X > 18)$

$$z_{18} = \frac{18 - 10}{4} = 2$$



$N_{18} = 365 \times P(Z > 2) = 365 \times [1 - P\ (Z \leq 2)] = 365 \times (1 - 0{,}9772) = 365 \times 0{,}228 =$
8,3

Esercizio 2

Sia X la v.c. Normale con media μ = 40 mm e varianza σ^2 = 100, che descrive la lunghezza dei pezzi prodotti da un certo macchinario nell'arco di una giornata

$$X \sim N\,(40,\, 100)$$

a) Si determino i quartili Q_1, Q_2 e Q_3 di X;

b) Si determini la lunghezza $\hat{x}$ tale che il 10% dei pezzi sia più corto di $\hat{x}$;

c) Si determini la lunghezza $\hat{x}$ tale che il 20% dei pezzi sia più lungo di $\hat{x}$;

Soluzione

I tre quesiti richiedono di determinare un valore di X a partire da un valore noto di probabilità.
Pertanto vanno risolti ricercando nella tavola il valore della funzione di ripartizione F(z) per risalire all'ascissa z cui corrisponde.

z	**0**	**0,01**	**0,02**	**...**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080		0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	...	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	...	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	...	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	...	0,6808	0,6844	0,6879
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	F(z)	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	...	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	...	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	...	0,9998	0,9998	0,9998

Il valore di X viene infine calcolato utilizzando la trasformazione inversa alla standardizzazione, ossia:

$$x = z\sigma + \mu$$

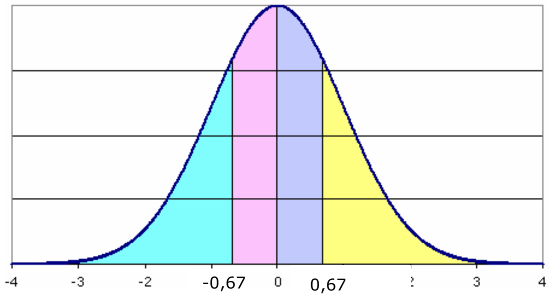
a)

I 3 quartili si dispongono lungo l'asse delle ascisse ad intervalli tali che l'area compresa tra uno e l'altro sia uguale a 0,25.
Per la simmetria, rispetto alla normale standard $z_{Q1} = -\,z_{Q3}$.

$P\,(Z \leq z_{Q3}) = 0{,}75$

Il valore della F(z) più vicino a 0,75 è 0,7486, che cui corrisponde un ascissa z pari a 0,67.

Quindi: $z_{Q3} = 0{,}67$ e $z_{Q1} = -\,0{,}67$



Ad essi corrispondono ai due valori di X:

$Q_3 = z\sigma + \mu = (z_{Q3} \times 10) + 40 = (0{,}67 \times 10) + 40 =$ **33,3**

$Q_1 = z\sigma + \mu = (z_{Q1} \times 10) + 40 = (-\ 0{,}67 \times 10) + 40 =$ **46,7**

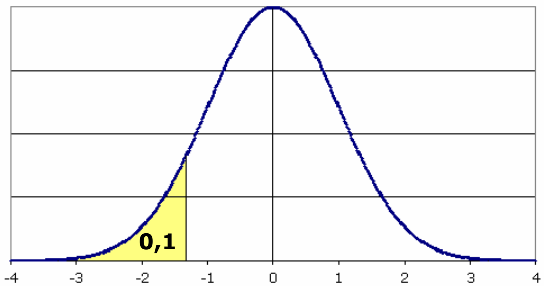
Il secondo quartile Q_2 corrisponde alla mediana, che, essendo la distribuzione Normale simmetrica, coincide con la media, quindi è pari a **40**.

b)

$\hat{x}\ :\ P(X \leq \hat{x}) = 0{,}1$

Il valore $\hat{x}$ si determina a partire dal corrispondente valore standardizzato:

$$\hat{z}\ :\ P(Z \leq \hat{z}) = 0{,}1$$



Bisogna cercare il valore di z corrispondente ad un valore della F(z) pari a 0,9 e prenderlo col segno "meno", quindi:

$\hat{z} = -\ 1{,}28$

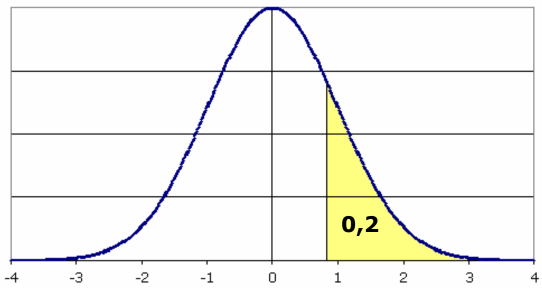
Da cui:

$\hat{x} = \hat{z}\sigma + \mu = -1{,}28 \times 10 + 40 =$ **27,2**

c)

$\hat{x}$: $P\,(X > \hat{x}) = 0{,}2$

Seguendo lo steso procedimento, $\hat{z}$: $P\,(Z\ Z\ \hat{z}) = 0{,}2$



Dalle tavole:

$\hat{z} = 0{,}84$

Quindi:

$\hat{x} = \hat{z}\,\sigma + \mu = 0{,}84 \times 10 + 40 =$ **48,4**

Esercizio 3

Il reddito dei dipendenti di 2 aziende è descritto da 2 variabili casuali Normali caratterizzate dai seguenti parametri:

$$X_1 \sim N\ (20,\ 16)$$
$$X_2 \sim N\ (25,\ 9)$$

dove i valori rappresentano migliaia di euro.
Sapendo che le 2 aziende contano, rispettivamente, 10 e 25 dipendenti:

a) si calcoli la probabilità che il reddito dell'intero insieme dei 35 individui sia compreso tra 23.000 e 25.000 euro;
b) si rappresentino graficamente le 2 distribuzioni con la distribuzione globale.

Soluzione

a)
Per la proprietà riproduttiva della v.c. Normale si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Il reddito X dell'intero insieme di individui può essere considerato come una combinazione lineare dei redditi delle 2 aziende:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

I coefficienti a_1 e a_2 possono essere determinati considerando che essi rappresentano il peso che X_1 e X_2 hanno nel generare la X.
Tale peso sarà certamente proporzionale alla numerosità delle due popolazioni, quindi può essere derivato come rapporto tra numero di dipendenti per azienda e totale degli individui considerati:

$a_1 = 10/35 = 0{,}29$
$a_2 = 25/35 = 0{,}71$

Il reddito generale è dunque descritto dalla v.c. Normale X i cui parametri possono essere ottenuti come:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i = (0{,}29 \times 20) + (0{,}71 \times 25) = 23{,}55$$
$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 = (0{,}28^2 \times 16) + (0{,}71^2 \times 9) = 5{,}8825$$

Quindi:
$$X \sim N\ (23{,}55;\ 5{,}88)$$

Per cui:

$$P\,(23 \le X \le 25) = P\left(\frac{23 - 23{,}55}{\sqrt{5{,}88}} \le Z \le \frac{25 - 23{,}55}{\sqrt{5{,}88}}\right) = P\,(-0{,}23 \le Z \le 0{,}6) =$$

$$P\,(Z \le 0{,}6) - P\,(Z \le -\,0{,}23) = P\,(Z \le 0{,}6) - [1 - P\,(Z \le 0{,}23)] = 0{,}7257 - (1 - 0{,}5910) = \mathbf{0{,}3167}$$