Università degli Studi di Cassino

Esercitazione di Statistica 2 del 18.01.2007

Dott.ssa Simona Balzano

Esercizio 1

Si considerino 1000 individui classificati in base al livello di istruzione (in anni) ed al salario annuo percepito (in migliaia di Euro) come segue:

Salario / Istruzione	0 -| 5 (S1)	5 -| 15 (S2)	Più di 15 (S3)	**Totale**
0 –| 8 (I1)	210	80	10	**300**
8 –| 12 (I2)	400	150	50	**600**
Più di 12 (I3)	30	50	20	**100**
Totale	**640**	**280**	**80**	**1000**

Si determino le probabilità che un individuo scelto a caso abbia:

1) un livello di istruzione che non superi gli 8 anni di studio;
2) un salario compreso tra 5.000 e 15.000 Euro;
3) un livello di istruzione di più di 12 anni di studio;
4) un salario superiore a 15.000 Euro;
5) un livello di istruzione che non superi i 12 anni di studio;
6) un salario superiore a 5.000 Euro;
7) un livello di istruzione di più di 12 anni e un salario maggiore di 15.000 Euro;
8) un livello di istruzione di più di 12 anni o un salario maggiore di 15.000 Euro;
9) un salario maggiore di 15.000 Euro avendo studiato più di 12 anni;
10) abbia studiato più di 12 anni sapendo che guadagna più di 15.000 Euro.

Soluzione

1) $P(I1) = \frac{300}{1000} = 0,3$

2) $P(S2) = \frac{280}{1000} = 0,28$

3) $P(I3) = \frac{100}{1000} = 0,1$

4) $P(S3) = \frac{80}{1000} = 0,08$

5) $P(I1 \cup I2) = P(I1) + P(I2) - P(I1 \cap I2) = \frac{300}{1000} + \frac{600}{1000} = 0,9$

6) $P(S2 \cup S3) = P(S2) + P(S3) - P(S2 \cap S3) = \frac{280}{1000} + \frac{80}{1000} = 0,36$

7) $P(I3 \cap S3) = \frac{20}{1000} = 0,02$

8) $P(I3 \cup S3) = P(I3) + P(S3) - P(I3 \cap S3) = \frac{100}{1000} + \frac{80}{1000} - \frac{20}{1000} = 0,16$

9) $P(S3 \mid I3) = \frac{P(I3 \cap S3)}{P(I3)} = \frac{20}{100} = 0,2$

10) $P(I3 \mid S3) = \frac{P(I3 \cap S3)}{P(S3)} = \frac{20}{80} = 0,25$

Esercizio 2

Siano date 3 urne U1, U2, U3 contenenti ciascuna 5 palline così distribuite:

U1: 3 palline bianche + 2 palline verdi
U2: 3 palline rosse + 2 palline nere
U1: 3 palline nere + 2 palline bianche

B B B	R R R	N N N
V V	N N	B B

Si consideri il seguente esperimento composto:
1. si sceglie un'urna;
2. si estraggono 3 palline dall'urna scelta.

Si supponga che la scelta dell'urna sia regolata dal lancio di un dado in questo modo:

U1: se il risultato del lancio del dado è 1 o 2;
U2: se il risultato del lancio del dado è 3, 4 o 5;
U3: se il risultato del lancio del dado è 6;

a) Si definisca la variabile casuale "numero di palline bianche estratte", nell'ipotesi di estrazione con e senza ripetizione;
b) Si rappresenti graficamente la v.c. per entrambi i casi;
c) Si calcolino valore medio e varianza della v.c. in entrambi i casi.

Soluzione

Essendo la prova così definita, la v.c. "numero di palline bianche estratte" può assumere i valori: 0, 1, 2, 3
Le rispettive probabilità vanno calcolate diversamente a seconda che l'estrazione sia con o senza ripetizione.
In entrambi i casi le probabilità dei diversi valori della v.c. vanno determinate utilizzando il teorema delle probabilità totali, ossia sono calcolate come probabilità condizionate all'urna da cui le 3 palline vengono estratte.

$$P(x) = \left[P(x \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(x \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(x \mid U3) \cdot P(U3)\right]$$

Considerando i possibili risultati del lancio di un dado, le probabilità associate a ciascuna urna sono;

$$P(U1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \qquad P(U2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \qquad P(U3) = \frac{1}{6}$$

<u>Estrazione con ripetizione</u>

a)

All'interno di ciascuna urna le probabilità elementari vanno determinate considerando le possibili combinazioni di palline.

- Nell'urna U1 le probabilità <u>P(x | U1)</u> sono:

$$P(0) = P(VVV) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125} = 0,064$$

$$P(1) = P(BVV) + P(VBV) + P(VVB) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) = 3 \cdot \frac{12}{125} = 0,288$$

$$P(2) = P(BBV) + P(VBB) + P(BVB) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) = 3 \cdot \frac{18}{125} = 0,432$$

$$P(3) = P(BBB) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{27}{125} = 0,216$$

- Nell'urna U2 le probabilità <u>P(x | U2)</u> sono::

$$P(0) = 1$$

$$P(1) = P(2) + P(3) = 0$$

- Nell'urna U3 le probabilità <u>P(x | U3)</u> sono::

$$P(0) = P(NNN) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{60} = 0,216$$

$$P(1) = P(BNN) + P(NBN) + P(NNB) = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{18}{125} = 0,432$$

$$P(2) = P(BBN) + P(NBB) + P(BNB) = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right) = 3\cdot\frac{12}{125} = 0,288$$

$$P(3) = P(BBB) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{125} = 0,064$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto considerando che all'interno di ciascuna urna le probabilità elementari P(x) seguono la legge Binomiale, con le rispettive probabilità di successo p (successo = pallina bianca), ricordando che la probabilità di x successi in n prove è calcolata come:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

ossia:

$$P(0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3$$

$$P(1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2$$

$$P(2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1$$

$$P(3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0$$

Considerando la composizione di ciascuna urna, le probabilità elementari sono, dunque:

U1	U2	U3
$P(0) = \binom{3}{0}\times\frac{3}{5}^0\times\frac{2}{5}^3 = 0,064$	$P(0) = 1$	$P(0) = \binom{3}{0}\times\frac{2}{5}^0\times\frac{3}{5}^3 = 0,216$
$P(1) = \binom{3}{1}\times\frac{3}{5}^1\times\frac{2}{5}^2 = 0,288$	$P(1) = P(2) = P(3) = 0$	$P(1) = \binom{3}{1}\times\frac{2}{5}^1\times\frac{3}{5}^2 = 0,432$
$P(2) = \binom{3}{2}\times\frac{3}{5}^2\times\frac{2}{5}^1 = 0,432$		$P(2) = \binom{3}{2}\times\frac{2}{5}^2\times\frac{3}{5}^1 = 0,288$
$P(3) = \binom{3}{3}\times\frac{3}{5}^3\times\frac{2}{5}^0 = 0,216$		$P(3) = \binom{3}{3}\times\frac{2}{5}^3\times\frac{3}{5}^0 = 0,064$

È ora possibile applicare il teorema delle probabilità totali:

$$P(0) = \left[P(0\,|\,U1)\cdot P(U1)\right] + \left[P(0\,|\,U2)\cdot P(U2)\right] + \left[P(0\,|\,U3)\cdot P(U3)\right] =$$

$$= 0,064\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{2} + 0,216\cdot\frac{1}{6} = 0,557$$

$$P(1) = \left[P(1 \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(1 \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(1 \mid U3) \cdot P(U3)\right] =$$

$$= 0,288 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0,432 \cdot \frac{1}{6} = 0,168$$

$$P(2) = \left[P(2 \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(2 \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(2 \mid U3) \cdot P(U3)\right] =$$

$$= 0,432 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0,288 \cdot \frac{1}{6} = 0,192$$

$$P(3) = \left[P(3 \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(3 \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(3 \mid U3) \cdot P(U3)\right] =$$

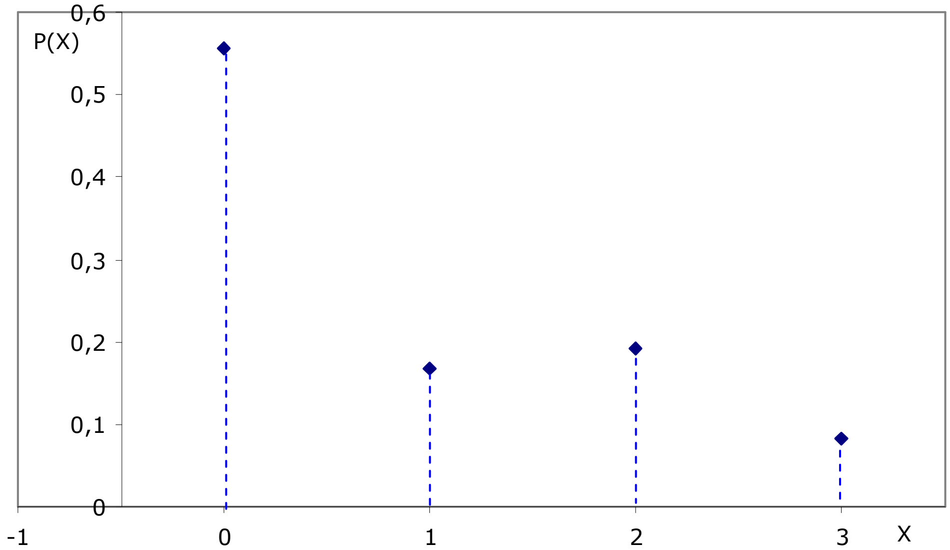
$$= 0,216 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0,064 \cdot \frac{1}{6} = 0,083$$

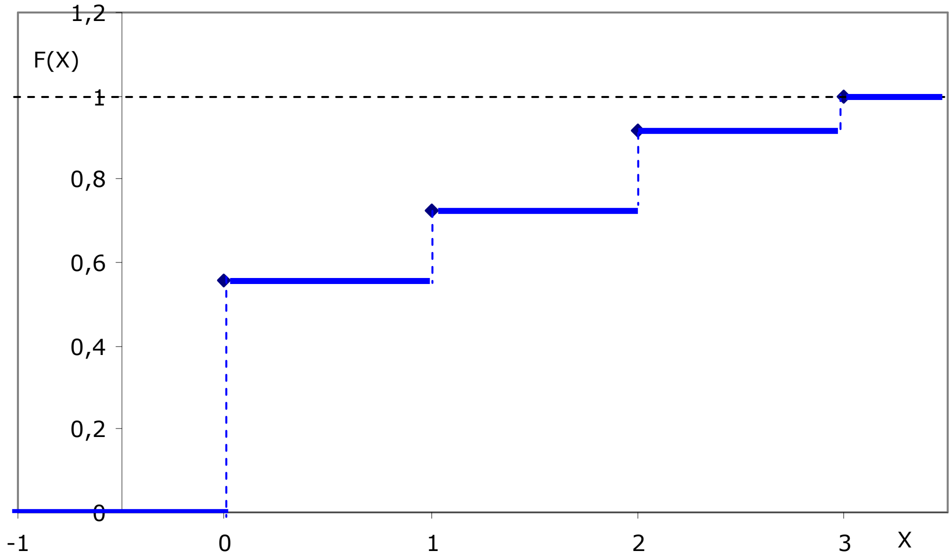
La variabile casuale X = "numero di palline bianche in 3 estrazioni con ripetizione" è, dunque, così definita:

X	**P(X)**	**F(X)**
0	0,557	0,557
1	0,168	0,725
2	0,192	0,917
3	0,083	1
Tot:	**1**	

b)

Rappresentazione grafica della v.c.:





c)

Il valore atteso di X è:

$$E(X)=\sum_i x_i \cdot P(x_i)=0\cdot 0,557+1\cdot 0,168+2\cdot 0,192+3\cdot 0,083=0,8$$

La varianza di X è:

$$\sigma^2=E\left[X-E(X)\right]^2=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$
$$=\left[(0-0,8)^2\cdot 0,557\right]+\left[(1-0,8)^2\cdot 0,168\right]+\left[(2-0,8)^2\cdot 0,192\right]+\left[(3-0,8)^2\cdot 0,083\right]=$$
$$=1,04$$

Estrazione senza ripetizione

a)

Le probabilità elementari P(x) vanno determinate considerando che la probabilità di estrazione di ogni pallina non è costante.

- Nell'urna U1 le probabilità P(x | U1) sono:

$$P(0)=0$$

$$P(1)=P(BVV)+P(VBV)+P(VVB)=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\right)=\frac{18}{60}=0,3$$

$$P(2)=P(BBV)+P(VBB)+P(BVB)=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{36}{60}=0,6$$

$$P(3)=P(BBB)=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{60}=0,1$$

- Nell'urna U2 le probabilità P(x | U2) sono::

$$P(0)=1$$

$$P(1)=P(2)+P(3)=0$$

- Nell'urna U3 le probabilità P(x | U3) sono::

$$P(0)=P(NNN)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{60}=0,1$$

$$P(1)=P(BNN)+P(NBN)+P(NNB)=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{36}{60}=0,6$$

$$P(2)=P(BBN)+P(NBB)+P(BNB)=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{18}{60}=0,3$$

$$P(3)=P(BBB)=0$$

N.B.: Nel caso di estrazione senza ripetizione le probabilità elementari P(x) non possono essere determinate utilizzando la legge binomiale, in quanto non reintroducendo la pallina nell'urna ad ogni estrazione, la composizione dell'urna, quindi la probabilità, non è costante, ossia le 3 estrazioni non sono più indipendenti

Applicando il teorema delle probabilità totali:

$$P(0)=\left[P(0\,|\,U1)\cdot P(U1)\right]+\left[P(0\,|\,U2)\cdot P(U2)\right]+\left[P(0\,|\,U3)\cdot P(U3)\right]=$$
$$=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+0,1\cdot\frac{1}{6}=0,517$$

$$P(1)=\left[P(1\,|\,U1)\cdot P(U1)\right]+\left[P(1\,|\,U2)\cdot P(U2)\right]+\left[P(1\,|\,U3)\cdot P(U3)\right]=$$
$$=0,3\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}+0,6\cdot\frac{1}{6}=0,2$$

$$P(2) = \left[P(2 \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(2 \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(2 \mid U3) \cdot P(U3)\right] =$$

$$= 0{,}6 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}25$$

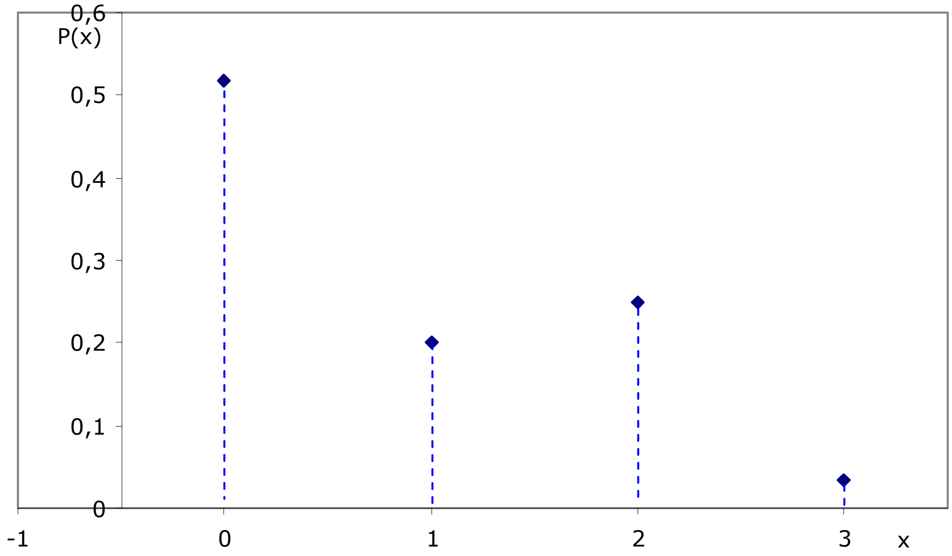
$$P(3) = \left[P(3 \mid U1) \cdot P(U1)\right] + \left[P(3 \mid U2) \cdot P(U2)\right] + \left[P(3 \mid U3) \cdot P(U3)\right] =$$

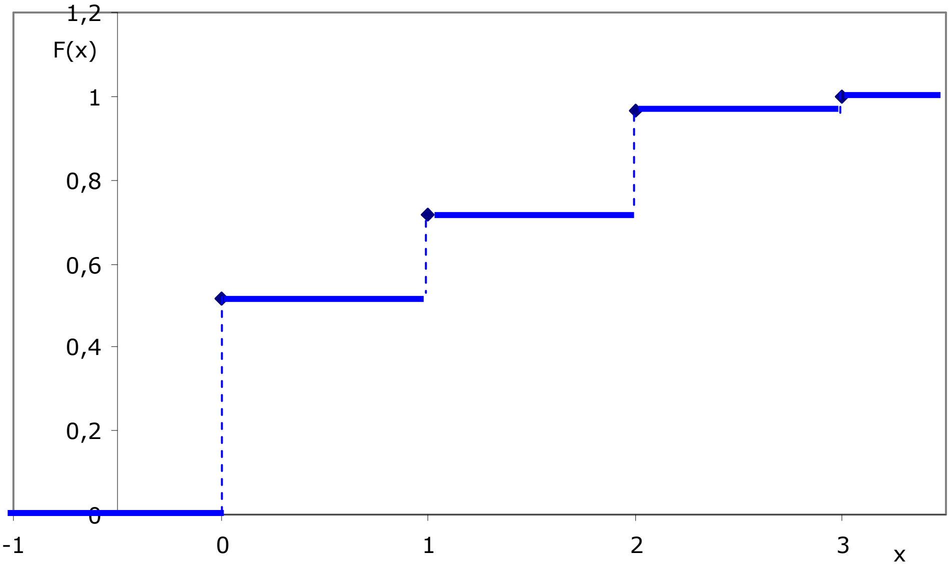
$$= 0{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}033$$

La variabile casuale X = "numero di palline bianche in 3 estrazioni senza ripetizione" è, dunque, così definita:

X	**P(X)**	**F(X)**
0	0,517	0,517
1	0,2	0,717
2	0,25	0,967
3	0,033	1
Tot:	**1**	

b)





c)

Il valore atteso di X è:

$$E(X)=\sum_i x_i\cdot P(x_i)=0\cdot 0,517+1\cdot 0,2+2\cdot 0,25+3\cdot 0,033=0,8$$

La varianza di X è:

$$\sigma^2=E\left[X-E(X)\right]^2=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=$$

$$=\left[(0-0,8)^2\cdot 0,517\right]+\left[(1-0,8)^2\cdot 0,2\right]+\left[(2-0,8)^2\cdot 0,25\right]+\left[(3-0,8)^2\cdot 0,033\right]=$$

$$=0,86$$