ESERCIZIO 1

Si riportano i voti relativi alla prova di esonero degli studenti di Statistica 1 nell'a.a. 2002-2003 ed il trimestre in cui hanno frequentato il corso:

Studente	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Voto Esonero	**27**	**26**	**24**	**30**	**22**	**25**	**29**	**30**	**23**	**25**
Trimestre	**I**	**II**	**II**	**I**	**I**	**II**	**I**	**II**	**I**	**I**

a) Misurare la variabilità della distribuzione dei voti conseguiti all'esonero in termini assoluti e relativi.
b) Esprimere la media e lo scarto quadratico medio in 100-esimi anzichè in 30-esimi.
c) Verificare se sussiste la proprietà associativa della media aritmetica.
d) Scomporre la variabilità del carattere "Voto all'esonero di Statistica 1" rispetto al trimestre di frequenza del corso.
e) Suddividere l'intera distribuzione del carattere "Voto all'esonero di Statistica 1" in tre classi equiampie, rappresentare graficamente la distribuzione in classi e calcolare per essa:
    1. media, quartili e moda.
    2. il numero di studenti il cui voto dell'esonero è compreso tra 24 e 28.
f) Calcolare le differenze semplici medie (con e senza ripetizione).

SVOLGIMENTO

a)

La variabilità in termini assoluti/relativi può essere misurata rispetto ad un centro (indici di dispersione attorno ad un centro) o andando a comparare ciascun valore del carattere di interesse rispetto a tutti gli altri (indici di disuaguaglianza). A queste due categorie di indici se ne aggiunge una terza che misura la variabilità misurando la diversità tra due particolari termini della distribuzione o due quantili.

Facendo riferimento, in particolare, alla variabilità attorno ad un centro gli indici assoluti più comunemente utilizzati si basano sulla differenza tra i singoli valori e la media aritmetica. Tali indici possono essere considerati sia considerando la somma degli scarti in valore assoluto (scostamento semplice dalla media) che la somma degli scarti al quadrato (varianza).

Quest'ultima, con riferimento ad una succesione di intensità è definita come:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mu\right)^2}{n}$$

ovvero come media della variabile scarti al quadrato.

Con riferimento ai dati dell'esempio la seguente tabella riporta i calcoli della varianza secondo tale formula:

Studente	Voto Esonero	Scarti	Scarti^2
1	27	0.9	0.81
2	26	-0.1	0.01
3	24	-2.1	4.41
4	30	3.9	15.21
5	22	-4.1	16.81
6	25	-1.1	1.21
7	29	2.9	8.41
8	30	3.9	15.21
9	23	-3.1	9.61
10	25	-1.1	1.21
	261	totale	72.9
	26.1	media	7.29

E’ possibile utilizzare la seguente formula alternativa per il calcolo della varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

I calcoli in base a questa formula sono riportati nella tabella seguente:

Studente	Voto Esonero		Voto Esonero^2
1	27		729
2	26		676
3	24		576
4	30		900
5	22		484
6	25		625
7	29		841
8	30		900
9	23		529
10	25		625
	261	totale	6885
	26.1	media	688.5
		varianza	7.29

Come si vede le due formule conducono agli stessi risultati, la seconda formula si rivela più agevole da utilizzare quando si fa ricorso ad una calcolatrice ed i numeri non sono molto grandi. In tale caso è possibile calcolare la varianza tenendo conto della seguente relazione:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - k)^2}{n} - \left(k - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2$$

dove con *k* si è indicata un'adeguata costante. Se nella formula precedente si pone *k*=0 si ottiene la formula della varianza come differenza tra il momento secondo ed il momento primo al quadrato. Questa formula permette di ridurre l'ordine di grandezza dei dati prima di procedere al calcolo. Applicando tale formula all'esempio, ponendo *k*=20, si ha:

Studente	Voto Esonero	Voto Esonero - k		(Voto Esonero - k)^2
1	27	7		49
2	26	6		36
3	24	4		16
4	30	10		100
5	22	2		4
6	25	5		25
7	29	9		81
8	30	10		100
9	23	3		9
10	25	5		25
	261		totale	445
	26.1		media	44.5

Applicando la formula sopra riportata si ha:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - k)^2}{n} - \left(k - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2 = 44.5 - (20 - 26.1)^2 = 7.29$$

La radice della varianza, noto come scarto quadratico medio, esprime la variabilità nell'unità di misura originaria della variabile in questione (la varianza, essendo una media degli scarti al quadrato della variabile, esprime invece la variabilità al quadrato dell'unità di misura della variabile):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7.29} = 2.7$$

I calcoli per la determinazione della varianza, usando l'uno o l'altro dei due procedimenti illustrati, possono essere condotti anche a partire dalla distribuzione di frequenza piuttosto che dalla successione delle intensità osservate.

Nel caso dell'esempio la distribuzione di frequenza (assoluta e relativa) viene di seguito riportata:

Voto Esonero	Frequenza (n_i)	Frequenza relativa (f_i)
22	1	0.1
23	1	0.1
24	1	0.1
25	2	0.2
26	1	0.1
27	1	0.1
29	1	0.1
30	2	0.2
	10	

Tale distribuzione, nel caso dei dati in questione, sebbene non si riveli molto informativa, viene riportata solo per mostrare il procedimento di calcolo della varianza nel caso in cui i dati a disposizione siano organizzati in una distribuzione di frequenza.
Anche per una distribuzione di frequenza è possibile adottare uno o l'altro dei due procedimenti di calcolo sopra riportati nel caso di una successione di intensità.
Seguendo il primo procedimento la varianza è definita come:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f_i$$

I calcoli, secondo tale formula, sono riportati nella seguente tabella sia nel caso in cui si utilizzino le frequenze assolute che direttamente le frequenze relative:

Voto Esonero	Frequenza (n_i)	Frequenza relativa (f_i)	Voto Esonero x n_i	Voto Esonero x f_i	Scarti	Scarti^2	Scarti^2 x n_i	Scarti^2 x f_i
22	1	0.1	22	2.2	-4.1	16.81	16.81	1.681
23	1	0.1	23	2.3	-3.1	9.61	9.61	0.961
24	1	0.1	24	2.4	-2.1	4.41	4.41	0.441
25	2	0.2	50	5	-1.1	1.21	2.42	0.242
26	1	0.1	26	2.6	-0.1	0.01	0.01	0.001
27	1	0.1	27	2.7	0.9	0.81	0.81	0.081
29	1	0.1	29	2.9	2.9	8.41	8.41	0.841
30	2	0.2	60	6	3.9	15.21	30.42	3.042
	10		261	26.1	**TOTALE**		72.9	7.29
			26.1		**TOTALE / n**		7.29	

Utilizzando invece la seconda formula si ha:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{n_i}{n} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{n_i}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)^2$$

I calcoli per l'applicazione di tale formula sono riportati nella seguente tabella:

Voto Esonero	Frequenza	Frequenza relativa	Voto Esonero x f_i	Voto Esonero^2	Voto Esonero^2 x n_i	Voto Esonero^2 x f_i
22	1	0.1	2.2	484	484	48.4
23	1	0.1	2.3	529	529	52.9
24	1	0.1	2.4	576	576	57.6
25	2	0.2	5	625	1250	125
26	1	0.1	2.6	676	676	67.6
27	1	0.1	2.7	729	729	72.9
29	1	0.1	2.9	841	841	84.1
30	2	0.2	6	900	1800	180
	10		26.1	**TOTALE**	6885	688.5
				TOTALE / n	688.5	

A questo punto, una volta calcolati il momento secondo e il momento primo è agevole verificare come si ottiene lo stesso risultato per la varianza:

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = 688.5 - 26.1^2 = 7.29$$

Un ulteriore indice di variabilità assoluto è definito dal campo di variazione, vale a dire dalla differenza tra valore massimo e valore minimo. Nel caso dei dati a disposizione si ha:

Min	22
Max	30
Campo Variaz.	8

Un indice analogo ma più robusto rispetto alla presenza di eventuali valori anomali è la differenza interquartile (IQR), definita come differenza tra terzo e primo quartile.

Per il calcolo dei quartili è necessario prima passare alla successione ordinata, riportata di seguito:

	Studente	Voto Esonero
1	**5**	22
2	**9**	23
3	**3**	24
4	**6**	25
5	**10**	25
6	**2**	26
7	**1**	27
8	**7**	29
9	**4**	30
10	**8**	30

Essendo il numero di osservazioni pari, è possibile calcolare le posizioni dei tre quartili come di seguito indicato:

posiz. Q1 = n/4 = 2.5 ← prima modalità

posiz. Q1 = n/4 + 1 = 3.5 ← seconda modalità

da cui sa ha che il primo quartile corrisponde all'intensità che occupa la terza posizione nella successione ordinata delle intensità:

Q1 = 24

Per il terzo quartile si ha invece:
posiz. Q3 = 3 n/4   = 7.5 ← prima modalità
posiz. Q3 = 3 n/4 + 1= 8.5 ← seconda modalità
da cui sa ha che il terzo quartile corrisponde all'intensità che occupa l'ottava posizione nella successione ordinata delle intensità:
Q3 = 29

E' possibile giungere agli stessi risultati calcolando i quartili come mediana delle due distribuzione che si ottengono considerando la prima e la seconda metà dei dati.
A titolo di completezza si riporta il calcolo della mediana:
posiz. Q2 = n/2   = 5 ← prima modalità
posiz. Q2 = n/2 + 1 = 6 ← seconda modalità
da cui sa ha che il secondo quartile (mediana)è pari alla media della quintà e della sesta intensità della successione ordinata:
Q2 = (x5 + x6)/2=(25+26)/2=25.5
Una volta calcolati i quartili è agevole calcolare la differenza interquartile e il coefficiente di variazione interquartile (che non dipende dall'unità di misura ma solo dal rapporto tra quartili:
$IQR = Q3 - Q1 = 29 - 24 = 5$

$$CQV = \frac{Q3 - Q1}{Q1 + Q3} = \frac{29 - 24}{24 + 29} = 0.09$$

Come ulteriori indici relativi di variabilità vengono di seguito riportati il coefficiente di variazione e lo scarto quadratico medio relativo:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2.7}{26.1} = 0.10$$

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma}{\max(\sigma)} = \frac{\sigma}{\mu\sqrt{n-1}} = \frac{2.7}{26.1\sqrt{10-1}} = 0.03$$

b)
Il calcolo della media e dello scarto quadratico medio in centesimi anziché in trentesimi può avvenire trasformando prima i dati di partenza e poi effettuando nuovamente i calcoli oppure sfruttando alcune proprietà di media e scarto quadratico medio.
Il passaggio dei voti da una scala in trentesimi ad una scala in centesimi può avvenire secondo la seguente proporzione:
voto in trentesimi : 30 = x : 100 → x = voto in trentesimi * 100 / 30
dove con x si è indicato il voto in centesimi.
Effettuando i calcoli di media, varianza e scarto quadratico medio sui dati trasformati si ha (si è utilizzato in particolare il secondo dei due procedimenti sopra illustrati per il calcolo della varianza):

Studente	Voto Esonero (30^)	Voto Esonero (100^)		Voto Esonero^2 (100^)
1	27	90		8100
2	26	86.67		7511.11
3	24	80		6400
4	30	100		10000
5	22	73.33		5377.78
6	25	83.33		6944.44
7	29	96.67		9344.44
8	30	100		10000
9	23	76.67		5877.78
10	25	83.33		6944.44
	261	870	**totale**	76500
	26.1	87	**media**	7650
	7.29	**varianza**		81
	2.7	**sqm**		9

Tenendo conto che la media e lo scarto quadratico medio risultano invarianti per cambiamenti di scala si ha più velocemente:

μ (centesimi) = μ (trentesimi) x 100 / 30 = 87

σ (centesimi) = σ (trentesimi) x 100 / 30 = 9

c)

Per verificare la sussistenza della proprietà associativa della media si procede alla divisione dei dati in due gruppi a seconda del trimestre di riferimento:

	Studente	Voto Esonero	Trimestre
1	1	27	I
2	4	30	I
3	5	22	I
4	7	29	I
5	9	23	I
6	10	25	I
1	2	26	II
2	3	24	II
3	6	25	II
4	8	30	II

Il calcolo della media con riferimento ai voti relativi al I trimestre è riportato nella seguente tabella:

	Studente	Voto Esonero	Trimestre
1	1	27	I
2	4	30	I
3	5	22	I
4	7	29	I
5	9	23	I
6	10	25	I
		156	TOTALE
		26	TOTALE / n

Gli stessi calcoli per i voti del II trimestre:

	Studente	Voto Esonero	Trimestre
1	2	26	II
2	3	24	II
3	6	25	II
4	8	30	II
		105	TOTALE

Di seguito sono riassunti i calcoli che permettono di verificare la proprietà associativa della media con riferimento al particolare esempio:

$\mu_1 \times n_1$	156
$\mu_2 \times n_2$	105
$(\mu_1 \times n_1) + (\mu_2 \times n_2)$	261
$n = n_1 + n_2$	10
$\mu = ((\mu 1 \times n1) + (\mu 2 \times n2))/n$	26.1

da cui si evince come la media generale è uguale alla media delle medie parziali.

d)

La scomposizione della variabilità del carattere Voto Esonero rispetto al trimestre di riferimento può essere effettuata utilizzando indifferentemente una delle due formule per il calcolo della varianza. In particolare di seguito si farà ricorso al secondo procedimento di calcolo illustrato al punto a.

I calcoli relativi ai voti del I trimestre sono riportati nella seguente tabella:

	Studente	Voto Esonero	Trimestre	Voto Esonero^2
1	1	27	I	729
2	4	30	I	900
3	5	22	I	484
4	7	29	I	841
5	9	23	I	529
6	10	25	I	625
		156	TOTALE	4108
		26	TOTALE / n	684.67
			varianza	8.67

La seguente tabella riporta gli stessi calcoli per i voti del II trimestre:

	Studente	Voto Esonero	Trimestre	Voto Esonero^2
1	2	26	II	676
2	3	24	II	576
3	6	25	II	625
4	8	30	II	900
		105	TOTALE	2777

La scomposizione della varianza in varianza interna (σ_W^2 → within) e varianza esterna (σ_B^2 → beetwen) è riportata di seguito:

μ_1	26
σ_1^2	8.67
n_1	6
μ_2	26.25
σ_2^2	5.19
n_2	4
$n = n_1 + n_2$	10
$\mu_1 \times n_1$	156
$\mu_2 \times n_2$	105
$(\mu_1 \times n_1) + (\mu_2 \times n_2)$	261
$\mu = ((\mu1 \times n1) + (\mu2 \times n2))/n$	26.1
$\sigma_1^2 \times n_1$	52
$\sigma_2^2 \times n_1$	20.75
$(\sigma_1^2 \times n_1) + (\sigma_1^2 \times n1)$	72.75
$\sigma_W^2=((\sigma_1^2 \times n_1) + (\sigma_1^2 \times n1))/n$	7.275
$\mu_1-\mu$	-0.1
$(\mu_1-\mu)^2$	0.01
$(\mu_1-\mu)^2 \times n_1$	0.06
$\mu_2-\mu$	0.15
$(\mu_2-\mu)^2$	0.02
$(\mu_2-\mu)^2 \times n_2$	0.09
$(\mu_1-\mu)^2 \times n_1 + (\mu_2-\mu)^2 \times n_2$	0.15
$\sigma_B^2=((\mu_1-\mu)^2 \times n_1 + (\mu_2-\mu)^2 \times n_2)/n$	0.015
$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2$	7.29

e)

La suddivisione in classi equiampie può essere effettuata calcolando il valore minimo (pari a 22) e il valore massimo (pari a 30) dei dati a disposizione. Vista la particolare natura dei dati in questione, per i quali si è a conoscenza del possibile voto di esonero (che va da 18 a 30), è conveniente utilizzare il minimo teorico piuttosto che quello osservato, vale a dire 18 anziché 22. Questo procedimento, pur portando, come si vedrà, ad una classe con frequenza nulla, e quindi inutile per la particolare distribuzione di frequenza,

permette di ottenere una divisione in classi che può essere utilizzata per dati della stessa natura relativi ad unità differenti.
Prima di procedere alla suddivisione in classi è necessario procedere alla determinazione dell'ampiezza delle stesse. Poiché si richiede una divisione in 3 classi, questa può essere effettuata secondo la semplice formula:
ampiezza classi = (max – min) / n. classi = (30 – 18) / 3 = 4
La seguente tabella riporta gli estremi delle classe e l'ampiezza effettiva delle stesse:

	Estr. Inf	Estr. Sup	Ampiezza
1	18	22	4
2	22	26	4
3	26	30	5

Come si vede la terza classe è più ampia rispetto alle altre due. La distribuzione di frequenza (assoluta e relativa, sia semplice che cumulata) secondo tali classi risulta quindi:

		Frequenza		Freq. Cumulata			
	Classi Voto	Assoluta	Relativa	Assoluta	Relativa	Ampiezza	Densità Freq.
1	[18, 22 [	0	0	0	0	4	0
2	[22, 26 [	5	0.5	5	0.5	4	1.25
3	[26, 30]	5	0.5	10	1	5	1
		10	1				

Poichè le classi hanno differente ampiezza è necessario calcolare anche la densità di frequenza per disegnare l'istogramma di frequenza normalizzato e per effettuare alcuni calcoli. Si nota in particolare come la terza classe, a parità di frequenza, è caratterizzata da una densità di frequenza minore rispetto alla seconda in quanto risulta più ampia rispetto a questa.

e1)
Il calcolo della media a partire dalla distribuzione in classi richiede l'utilizzo di un valore singolo per ciascuna classe. Normalmente si ricorre al valore centrale della classe.
La media aritmetica può essere calcolata indifferentemente a partire dalla distribuzione delle frequenze assolute o relative, come segue:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

I calcoli, sia con riferimento all'uso delle frequenze assolute che a quello diretto delle frequenze relative, sono riportati nella seguente tabella:

			Frequenza			
	Classi Voto	Valore centrale (x_i)	Assoluta (n_i)	Relativa (f_i)	x_i x n_i	x_i x f_i
1	[18, 22 [	20	0	0	0	0
2	[22, 26 [	24	5	0.5	120	12
3	[26, 30]	28	5	0.5	140	14
			10	1	260	26

Per calcolare i quartili si può fare riferimento alla tabella riportata al punto e contenente la distribuzione di frequenza cumulata relativa (funzione di ripartizione empirica).
Al riguardo la mediana è direttamente individuabile dall'esame della tabella, in quanto in corrispondenza della seconda classe la funzione di ripartizione empirica assume valore pari a 0.5. Poiché la seconda classe va dal voto 22 al voto 25 (l'estremo superiore 26 è escluso dalla classe) è immediato affermare che la mediana è pari proprio a 25, senza necessità di dover ricorrere all'usuale procedimento interpolativo.
Il calcolo del primo e del terzo quartile vengono invece effettuati di seguito utilizzando tale procedimento. Il primo quartile si trova nella seconda classe; per esso si ha:

$$Q1 = P_{0.25} = x_{P_{0.25-1}} + \frac{\left(x_{P_{0.25}} - x_{P_{0.25}-1}\right)\left(0.25 - F_{P_{0.25}-1}\right)}{\left(F_{P_{0.25}} - F_{P_{0.25}-1}\right)} = 22 + \frac{(26-22)(0.25-0)}{(0.5-0)} = 24$$

$$Q3 = P_{0.75} = x_{P_{0.75-1}} + \frac{\left(x_{P_{0.75}} - x_{P_{0.75}-1}\right)\left(0.75 - F_{P_{0.75}-1}\right)}{\left(F_{P_{0.75}} - F_{P_{0.75}-1}\right)} = 26 + \frac{(30-26)(0.75-0.5)}{(1-0.75)} = 30$$

Per quanto riguarda la moda è necessario (essendo le classi di ampiezza differente) fare riferimento alla densità di frequenza. Dall'esame della tabella riportata al punto e contenente tali valori, risulta che la classe modale è la seconda classe, cui corrisponde la massima densità di frequenza, pari a 1.25.

e2)
Il numero di studenti il cui voto di esonero è compreso tra 24 e 28 può essere calcolato secondo i seguenti passi:
1) Calcolo delle densità di frequenze.
La tabella, calcolata al punto e, viene riportata nuovamente di seguito:

		Frequenza		Freq. Cumulata			
	Classi Voto	Assoluta	Relativa	Assoluta	Relativa	Ampiezza	Densità Freq.
1	[18, 22 [	0	0	0	0	4	0
2	[22, 26 [	5	0.5	5	0.5	4	1.25
3	[26, 30]	5	0.5	10	1	5	1
		10	1				

2) Calcolo della frequenza degli studenti con voto tra 24 e 28.

Gli studenti di interesse sono in parte nella seconda classe (voti da 24 a 26) e in parte nella terza classe (voti da 28 a 26).
Con riferimento agli studenti appartenenti alla seconda classe è possibile calcolare la densità di frequenza ad essi corrispondente secondo la seguente proporzione:
1.25 : 4 = x : (26 – 24) → x=((26-24) * 1.25)/4=0.625
La frequenza relativa degli studenti con voti da 24 a 26 si ottiene moltiplicando il valore di densità appena ottenuto per l'ampiezza dell'intervallo di voti in questione:
0.625 * (26 – 24) = 1.25

Per gli studenti con voto tra 26 e 28, la densità di frequenza è pari a:
1 : 5 = x : (28 – 26) → x=((28-26) * 1)/5=0.4
mentre la frequenza relativa di tali studenti è:
0.4 * (30 – 28) = 0.8

3) *Calcolo del numero complessivo di studenti con voti nell'intervallo di interesse.*

Sommando le due frequenze relative calcolate si ottiene:
1.25 + 1 = 2.05
che, arrotondato per difetto alla prima cifra intera, indica che il numero di studenti con voto tra 24 e 28 è pari a 2.

f)

Come indici di disuguaglianza si procede di seguito al calcolo delle differenze medie (con e senza ripetizione).

$$\Delta_{con\ rip.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|}{n^2}$$

$$\Delta_{senza\ rip.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|}{n\left(n-1\right)}$$

E' utile organizzare i dati secondo una struttura tabellare in cui si riportano le intensità del carattere sulla testata di riga e sulla testata di colonna e, in corrispondenza di ciascuno degli incroci di riga e di colonna, si effettua il calcolo della differenza in valore assoulto tra le due intensità in questione:

		Voto Esonero									
		22	23	24	25	25	26	27	29	30	30
Voto Esonero	22	0	1	2	3	3	4	5	7	8	8
	23	1	0	1	2	2	3	4	6	7	7
	24	2	1	0	1	1	2	3	5	6	6
	25	3	2	1	0	0	1	2	4	5	5
	25	3	2	1	0	0	1	2	4	5	5
	26	4	3	2	1	1	0	1	3	4	4
	27	5	4	3	2	2	1	0	2	3	3
	29	7	6	5	4	4	3	2	0	1	1
	30	8	7	6	5	5	4	3	1	0	0
	30	8	7	6	5	5	4	3	1	0	0

Si nota facilmente come la matrice risultante contiene tutti zero sulla diagonale principale (differenze tra ciascun valore e se stesso) ed è simmetrica (la differenza in valore assoluto tra l'i-esimo e il j-esimo valore è uguale alla differenza in valore assoluto tra il j-esimo e l'i-esimo valore).
Una volta costruita tale tabella i calcolo dei due indici sono agevoli, come di seguito riportato:

306	Totale
10	n
90	n x (n-1)
3.4	Δ (senza rip.)
100	n^2
3.06	Δ (con rip.)

Del resto è possibile passare dall'una all'altra tenendo conto della seguente relazione:

$$\Delta_{senza\ rip.} = \frac{n-1}{n}\Delta_{con\ rip.}$$

Se inoltre si tiene conto che la matrice è simmetrica è possibile calcolare la somma solo degli elementi sotto la diagonale principale (o, equivalentemente sotto di essa) e ricorrere alle seguenti formule:

$$\Delta_{con\ rip.} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left|x_i - x_j\right|}{n^2}$$

$$\Delta_{senza\ rip.} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left|x_i - x_j\right|}{n(n-1)}$$

Tali indici possono essere calcolati anche nel caso in cui si parta dai dati organizzati secondo la distribuzione di frequenza. In questa situazione è utile riportare sulle testate di riga e colonna, accanto ai valori della variabile, le relative frequenze.
In corrispondenza della posizione (i,j) della tabella si troverà la differenza tra il valore i-esimo e il valore j-esimo moltiplicati per le rispettive frequenze di occorrenza, ovvero:

$$\left|x_i - x_j\right| n_i n_j$$

Anche in questo caso, naturalmente, la matrice conserva la proprietà della simmetria ed ha tutti valori nulli sulla diagonale principale. La seguente tabella riporta tali calcoli con riferimento all'esempio:

	Voto Esonero	22	23	24	25	26	27	29	30	
Voto Esonero	Frequenza	1	1	1	2	1	1	1	2	10
22	1	0	1	2	6	4	5	7	16	
23	1	1	0	1	4	3	4	6	14	
24	1	2	1	0	2	2	3	5	12	
25	2	6	4	2	0	2	4	8	20	
26	1	4	3	2	2	0	1	3	8	
27	1	5	4	3	4	1	0	2	6	
29	1	7	6	5	8	3	2	0	2	
30	2	16	14	12	20	8	6	2	0	
	10									306 Totale

Si nota dalla tabella come il totale della tabella così costruita risulta uguale a quello della tabella costruita considerando la succesione delle intensità della variabile piuttosto che la distribuzione di frequenza.