

PROBABILITA' E VARIABILI CASUALI

ESERCIZIO 1

Due giocatori estraggono due carte a caso da un mazzo di carte napoletane. Calcolare:

- 1) la probabilità che la prima carta sia una figura oppure una carta di spade;
- 2) la probabilità che si estragga una carta che abbia un seme diverso da coppe .

Soluzione

Quesito 1

Si definisce la prova: estrazione di 1 carta. L'evento E1 esprime l'uscita di una figura, l'evento E2 l'uscita di una carta di spada. Se gli eventi non sono incompatibili la probabilità che si verifichi E1 o E2 è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi cui si sottrae la probabilità che i due eventi possano verificarsi contemporaneamente. In simboli:

$$P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2)$$

per cui:

$$12/40 + 10/40 - 3/40$$

Quesito 2

Sviluppando lo stesso ragionamento si ottiene:

$$30/40 * 1/39$$

ESERCIZIO 2

In una prova si effettua il lancio di 2 dadi e si scommetta sul risultato di essa. Dopo aver definito gli eventi che la compongono si espliciti con le esatte notazioni e si calcoli la probabilità che la somma sia:

- 1) uguale a 2, a 3, a 5;
- 2) che sia dispari.

Soluzione

Quesito 1

Prova: esperimento empirico

Si definisce la prova: lancio di 2 dadi equilibrati. Il punteggio del primo dado sarà A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 . Il punteggio del secondo dado sarà espresso da B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6

Evento: risultato della prova. Probabilità: misura dell'attitudine al verificarsi dell'evento

Spazio campionario: è l'unione di tutti i possibili eventi generati dalla prova

Scommettiamo sulla SOMMA dei dadi (A_i, B_j) dove $i=1, \dots, 6$ e $j=1, \dots, 6$

In questo caso lo spazio campionario è dato dai 36 eventi generati dalla prova

$$P(\text{somma}=2)=P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) * P(B_1) = 1/6 * 1/6 = 1/36$$

$$P(\text{somma}=3)=P[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = P(A_1) * P(B_2) + P(B_1) * P(A_2) = 1/6 * 1/6 + 1/6 * 1/6 = 2/36$$

Lo stesso procedimento si utilizza per il calcolo della somma = 5

Quesito 2

In tal caso indico con E_1 l'uscita del numero dispari e con ${}_{\text{non}}E_1$ l'uscita del numero pari.

Anche in questo caso lo spazio campionario è dato dai 36 eventi generati dalla prova.

$$P(\text{somma=numero dispari})=P[(E_1 \cap {}_{\text{non}}E_1) \cup ({}_{\text{non}}E_1 \cap E_1)] =$$

$$P(E_1) * P({}_{\text{non}}E_1) + P({}_{\text{non}}E_1) * P(E_1) = 3/6 * 3/6 + 3/6 * 3/6 = 18/36$$

$$P(\text{somma=numero dispari})=1-P(\text{somma=pari})=1-1/2=1/2$$

ESERCIZIO 3

Un'urna contiene 7 palline la cui faccia è contrassegnata dai seguenti punteggi:

1, 1, 2, 2, 3, 3 e 4. Dalla seguente urna si estraggono 2 palline con ripetizione.

1) Costruire la distribuzione di probabilità della variabile casuale D (differenza dei punteggi)

2) Calcolare media, moda e varianza della variabile casuale D (differenza dei punteggi)

3) Costruire la distribuzione di probabilità della variabile casuale² (somma dei punteggi al quadrato)

Soluzione

Quesito 1

Definisco la PROVA: estrazione di due palline da un'urna con ripetizione.

Definisco il punteggio alla prima estrazione con $A_1=1, A_2= 2, A_3= 3$ e $A_4= 4$

Definisco il punteggio alla seconda estrazione con $B_1, B_2= 2, B_3= 3$ e $B_4= 4$

La distribuzione di probabilità della variabile D è ottenuta considerando i 49 possibili risultati nell'estrazione delle due palline dall'urna. La tabella contiene i risultati possibili riferiti alla prima pallina (sulle righe) e alla seconda pallina (sulle colonne): ciascuna cella contiene il risultato della differenza tra il valore della riga e della colonna corrispondente.

Schema di calcolo dei 49 valori della variabile casuale "differenza dei punteggi"

Faccia della prima pallina estratta	Faccia della seconda pallina estratta							
	1	1	2	2	3	3	4	
1	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	
1	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	
2	1	1	0	0	-1	-1	-2	
2	1	1	0	0	-1	-1	-2	
3	2	2	1	1	0	0	-1	
3	2	2	1	1	0	0	-1	
4	3	3	2	2	1	1	0	

$$P(\text{differenza}=0) = P[(A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_3) \cup (A_4 \cap B_4)]$$

$$P(\text{differenza}=0) = P(A_1) * P(B_1) + P(A_2) * P(B_2) + P(A_3) * P(B_3) + P(A_4) * P(B_4) =$$

$$(2/7)(2/7) + (2/7)(2/7) + (1/7)(1/7) =$$

$$4/49 + 4/49 + 1/49 = 13/49$$

Allo stesso risultato si perviene evidenziando nella tabella di calcolo quante volte si presenta una differenza di punteggio pari a "0" (13 volte) sul totale dei casi (49).

Lo stesso tipo di confronto si può effettuare in tutti i casi che verranno presentati di seguito.

$$P(\text{differenza}=1) = P[(A_2 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_4 \cap B_3)]$$

$$P(\text{differenza}=1) = P(A_2) * P(B_1) + P(A_3) * P(B_2) + P(A_4) * P(B_3) =$$

$$(2/7)(2/7) + (2/7)(2/7) + (1/7)(2/7) = 10/49$$

$$P(\text{differenza}=-1) = \text{per analogia} = 10/49$$

$$P(\text{differenza}=2) = P[(A_3 \cap B_1) \cup (A_4 \cap B_2)]$$

$$= P(A_4) * P(B_1) + P(A_3) * P(B_2) = (2/7)(2/7) + (1/7)(2/7) = 6/49$$

$$P(\text{differenza}=-2) = \text{per analogia} = 6/49$$

$$P(\text{differenza}=3) = P(A_4 \cap B_1)$$

$$P(A_4) * P(B_1) = (1/7)(2/7) = 2/49$$

$$P(\text{differenza}=-3) = \text{per analogia} = 2/49$$

D (differenza punteggi)	Proba-bilità
-3	2/49
-2	6/49
-1	10/49
0	13/49
1	10/49
2	6/49
3	2/49
Somma	1

Quesito 2

Calcolare moda, media e varianza della variabile casuale differenza di punteggio

D	Probabilità	Probabilità	D * Prob.	D ²	D ² * Prob.
-3	2/49	0,041	-0,1224	9	0,3673
-2	6/49	0,122	-0,2449	4	0,4898
-1	10/49	0,204	-0,2041	1	0,2041
0	13/49	0,265	0,0000	0	0,0000
1	10/49	0,204	0,2041	1	0,2041
2	6/49	0,122	0,2449	4	0,4898
3	2/49	0,041	0,1224	9	0,3673
Somma	1	1	0		2,1224

$$E(D) = 0$$

$$\text{Var}(D) = E(D^2) - [E(D)]^2$$

$$\text{Var}(D) = 2,122$$

$$\text{Moda} = 0$$

Quesito 3

Schema di calcolo dei 49 valori della variabile casuale "somma dei punteggi al quadrato "

Faccia della prima pallina estratta	Faccia della seconda pallina estratta						
	1	1	2	2	3	3	4
1	4	4	9	9	16	16	25
2	9	9	16	16	25	25	36
2	9	9	16	16	25	25	36
3	16	16	25	25	36	36	49
3	16	16	25	25	36	36	49
4	25	25	36	36	49	49	64

$$P(S^2 = 4) = P(A_1 \cap B_1) \cup P(B_1 \cap A_1)$$

$$P(S^2 = 4) = [P(A_1) * P(B_1) + P(B_1) * P(A_1)]^2 = [(1/7)(1/7) + (1/7)(1/7)]^2 = 4/49$$

Allo stesso risultato si perviene evidenziando nella tabella di calcolo quante volte il quadrato della somma dei punteggi è pari a "4" (4 volte) sul totale dei casi (49).

Lo stesso tipo di confronto si può effettuare in tutti i casi che verranno presentati di seguito.

$$P(S^2 = 9) = [P(A_2 \cap B_1) \cup P(B_2 \cap A_1)]^2 = [P(A_2) * P(B_1) + P(B_2) * P(A_1)]^2$$

$$= (2/7)(2/7) + (2/7)(2/7) = 8/49$$

Con lo stesso procedimento si determinano gli altri valori richiesti.

S ²	Probab.
4	4/49
9	8/49
16	12/49
25	12/49
36	8/49
49	4/49
64	1/49
Somma	1

ESERCIZIO 4

Si estraggano da una urna, contenente 3 palline bianche, 5 nere e 7 rosse, due palline senza ripetizione.

- 1) Calcolare la probabilità che si estraggano due palline bianche;
- 2) calcolare la probabilità che si estragga almeno una pallina bianca ipotizzando una estrazione con ripetizione.

Soluzione

Quesito 1

Definisco B pallina bianca e \bar{B} pallina non bianca

$$P(2 \text{ palline bianche}) = P(B \cap B) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14}$$

Quesito 2

$$P(\text{almeno una pallina bianca}) = P[(B \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap B) \cup (B \cap B)]$$

$$\text{e cioè: } \frac{3}{15} \times \frac{12}{15} + \frac{12}{15} \times \frac{3}{15} + \frac{3}{15} \times \frac{3}{15}$$

ESERCIZIO 5

I dati in tabella si riferiscono alle risposte date dagli studenti del corso di Statistica I nell'ambito dell'indagine Sesso, droga. Nella tabella si confronta il sesso e il giudizio sulla gravità o meno dell'uso di droghe leggere.

Sesso	Uso droghe grave (B_1)	Uso droghe non grave (B_2)	Totale
Femmine (A_1)	56	34	90
Maschi (A_2)	60	66	126
Totale	116	100	216

Calcolare:

- 1) la probabilità che scegliendo uno studente a caso sia femmina;
- 2) la probabilità che scegliendo uno studente a caso questi ritenga grave far uso di droghe leggere;
- 3) la probabilità che scegliendo uno studente a caso questi sia maschio e non ritenga grave far uso di droghe leggere;
- 4) dal momento che giudica l'uso di droghe leggere non grave, sia maschi
- 5) dal momento che è femmina, giudichi l'uso di droghe leggere non grave.

Soluzione

- 1) $P(A_1) = 90/216$
- 2) $P(B_2) = 116/216$
- 3) $P(A_2 \cap B_2) = 66/216$
- 4) $P(A_2 | B_2) = 66/100$;
- 5) $P(B_2 | A_1) = 34/90$.

ESERCIZIO 6

In un cassetto ci sono 2 cucchiaini e 4 forchette. Si estrae a caso una posata: se questa è una forchetta, la si rimette nel cassetto, aggiungendo un'altra forchetta; se è un cucchiaino, non la si rimette nel cassetto. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una seconda posata questa sia una forchetta.

Soluzione

Si indichi con C_1 e C_2 l'estrarre la prima e la seconda volta un cucchiaino, e con F_1 ed F_2 analoghi eventi riferiti all'estrazione di una forchetta. La probabilità da calcolare è ricavata come di seguito :

$$\begin{aligned} P(F_2) &= P(F_1 \cap F_2) + P(C_1 \cap F_2) = P(F_1) * P(F_2|F_1) + P(C_1) * P(F_2|C_1) = \\ &= 4/6 * 5/7 + 2/6 * 1/5 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7

Davanti ad uno sportello postale ci sono 5 individui, due donne e tre uomini. Calcolare:

- 1) la probabilità che le due donne siano in fondo alla coda;
- 2) la probabilità che le due donne siano una davanti all'altra.

Soluzione

Quesito 1

La combinazione dei cinque individui può essere assimilata a disposizioni senza ripetizione di cinque elementi diversi. In tal caso il numero di soluzioni possibili è pari a $N!$, cioè $5!$.

Tra tutte le disposizioni possibili quella che prevede le due donne in coda sono pari $2 * 3!$ (le due donne sono a turno nella posizione quattro e cinque, gli uomini possono diversamente disporsi in $3!$ modi diversi). In sostanza:

$$\text{probabilità due donne in coda} = (2 * 3!) / 5! = 1 / 10$$

Quesito 2

Con la stessa logica la probabilità che le due donne siano l'una davanti all'altra è fornita dalla seguente espressione:

$$\text{probabilità due donne siano l'una davanti all'altra} = (4 * 2 * 3!) / 5! = 2 / 5$$

ESERCIZIO 8

Sia data un'urna contenente sei palline rosse e due palline gialle. Si estraggano due palline.

Calcolare nel caso in cui l'estrazione avvenga con ripetizione le seguenti probabilità:

- 1) estrarre due palline dello stesso colore;
- 2) estrarre almeno una gialla;
- 3) estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione;
- 4) estrarre due palline di colore diverso.

Soluzione

Quesito 1

Si indica con R (estrazione pallina rossa) e con G (estrazione pallina gialla):

I casi che si possono verificare sono (R,R); (G,G); (G,R), (R,G)

nella parentesi il primo posto indica il risultato alla prima estrazione, il secondo posto il risultato alla seconda estrazione

Nel caso di estrazione con ripetizione i due eventi risultano indipendenti pertanto la P(stesso colore)=

$$P[(R \cap R) \cup (G \cap G)] = P(R) * P(R) + P(G) * P(G) = \\ = 6/8 * 6/8 + 2/8 * 2/8$$

Quesito 2

$$1 - P[(R \cap R)] = 1 - P(R) * P(R) = 1 - 6/8 * 6/8$$

Quesito 3

$$P[(R \cap R) \cup (G \cap R)] = P(R) * P(R) + P(G) * P(R) = 6/8 * 6/8 + 2/8 * 6/8$$

Quesito 4

$$1 - P[(R \cap R) \cup (G \cap G)] = 1 - [P(R) * P(R) + P(G) * P(G)] = 1 - [6/8 * 6/8 + 2/8 * 2/8]$$