INDICI DI VARIABILITA'

Per il carattere Numero di Stabilimenti (NSTAB) si calcolino i seguenti indici di variabilità:

1. Range
2. Differenza Interquartile
3. Scarto Semplice dalla Mediana
4. Scarto Semplice dalla Media
5. Varianza
6. Scarto quadratico medio

Consideriamo la successione ordinata delle intensità:

0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,6,6,7,8,8,11

1. Range

$$Range(x_i) = x_{\max} - x_{\min} = 11 - 0 = 11$$

2. Differenza interquartile

$$Q_1 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{25+1}{2}\right)} = x_{(13)} = 1$$

$$Q_3 = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{25+1}{2}\right)} = x_{(13)} = 4$$

$$IQr = Q_3 - Q_1 = 4 - 1 = 3$$

3. Scarto Semplice dalla Mediana

$$Me = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_{\left(\frac{49+1}{2}\right)} = x_{(25)} = 2$$

x_i	n_i	$\lvert x_i - med(x_i) \rvert$	$\lvert x_i - med(x_i) \rvert n_i$
0	2	2	4
1	16	1	16
2	12	0	0
3	6	1	6
4	6	2	12
5	2	3	6
6	2	4	8
7	1	5	5
8	2	6	12
11	1	9	9
Totale	50		78

$$\frac{1}{n}\sum_i \lvert x_i - med(x_i) \rvert n_i = \frac{78}{50} = 1{,}56$$

4. Scarto Semplice dalla Media

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j n_j = \frac{1}{50}\left(0\times 2 + 1\times 16 + 2\times 12 + 3\times 6 + 4\times 6 + 5\times 2 + 6\times 2 + 7\times 1 + 8\times 2 + 11\times 1\right)$$

$$= \frac{138}{50} = 2,76$$

x_i	n_i	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\| n_i$
0	2	2,76	5,52
1	16	1,76	28,16
2	12	0,76	9,12
3	6	0,24	1,44
4	6	1,24	7,44
5	2	2,24	4,48
6	2	3,24	6,48
7	1	4,24	4,24
8	2	5,24	10,48
11	1	8,24	8,24
Totale	50		85,60

$$\frac{1}{n}\sum_i \left|x_i - \bar{x}\right| n_i = \frac{85,6}{50} = 1,71$$

5. Varianza

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x^2{}_j n_j = \frac{1}{50}(0^2\times 2 + 1^2\times 16 + 2^2\times 12 + 3^2\times 6 + 4^2\times 6 +$$

$$+5^2\times 2 + 6^2\times 2 + 7^2\times 1 + 8^2\times 2 + 11^2\times 1) = \frac{634}{50} = 12{,}68$$

$$\overline{x}^2 = (2{,}76)^2 = 7{,}62$$

$$s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 12{,}68 - 7{,}62 = 5{,}06$$

6. Scarto quadratico medio

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5{,}06} = 2{,}25$$

N.B. Risulta verificata la seguente proprietà degli indici di posizione:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2} \geq \frac{1}{n}\sum_i \left|x_i - \overline{x}\right| \geq \frac{1}{n}\sum_i \left|x_i - med\right|$$

Infatti risulta: 2,25 $\geqslant$ 1,71 $\geqslant$ 1,48

Con riferimento alla suddivisione in classi del carattere “Fatturato” (FATT), calcolare la varianza e lo scarto quadratico medio con riferimento ai casi delle classi equiampie, equifrequenti e di diversa ampiezza e frequenza

CLASSI EQUIAMPIE

Classi	$\hat{x}_j$	f_j	$\hat{x}_j f_j$	$\hat{x}_j^2$	$\hat{x}_j^2 f_j$
$\leqslant$484,8	294	0,82	241,08	86.436	70.877,52
484,8 --| 866,6	676	0,10	67,60	456.976	45.697,60
866,6 --| 1.248,4	1058	0,04	42,32	1.119.364	44.774,56
1248,4 --| 1.630,2	1439	0,02	28,78	2.070.721	41.414,42
> 1630,2	1821	0,02	36,42	3.316.041	66.320,82
Totale		*1,00*	416,2		269.084,92

$$s^2 = 269.084{,}92 - \left(416{,}2\right)^2 = 95.862{,}48$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{95.862{,}48} = 309{,}62$$

CLASSI EQUIFREQUENTI

Classi	$\hat{x}_j$	f_j	$\hat{x}_j f_j$	$\hat{x}_j^2$	$\hat{x}_j^2 f_j$
$\leqslant$129	116	0,20	23	13.456	2.691
129 --| 163	146	0,20	29	21.316	4.263
163 --| 285	224	0,20	45	50.176	10.035
285 --| 457	371	0,20	74	137.641	27.528
> 457	1.235	0,20	247	1.525.225	305.045
Totale		*1,00*	418		349.563

$$s^2 = 349.563 - (418)^2 = 174.504$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{174.504} = 418$$

CLASSI DI DIVERSA AMPIEZZA E FREQUENZA

Classi	$\hat{x}_j$	f_j	$\hat{x}_j f_j$	$\hat{x}_j^2$	$\hat{x}_j^2 f_j$
⩽200	150	0,50	75	22.500	11.250
200 --| 300	250	0,10	25	62.500	6.250
300 --| 400	350	0,14	49	122.500	17.150
400 --| 500	450	0,10	45	202.500	20.250
> 500	1.300	0,16	208	1.690.000	270.400
Totale		1,00	402		325.300

$$s^2 = 325.300 - (402)^2 = 163.696$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{163.696} = 405$$

Con riferimento al carattere “Numero di stabilimenti” (NSTAB), procedere alla standardizzazione della distribuzione, calcolare media e varianza della variabile standardizzata e calcolare la asimmetria.

Carattere NSTAB

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11
n_i	2	16	12	6	6	2	2	1	2	1

Da calcoli effettuati in precedenza risulta:

$$\overline{x} = 2,76 \qquad s = 2,25$$

I valori standardizzati $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{s}$ risultano:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11
z_i	**-1,23**	**-0,78**	**-0,34**	**0,11**	**0,55**	**1,00**	**1,44**	**1,88**	**2,33**	**3,66**

Calcoliamo la media

z_i	**-1,23**	**-0,78**	**-0,34**	**0,11**	**0,55**	**1,00**	**1,44**	**1,88**	**2,33**	**3,66**
n_i	2	16	12	6	6	2	2	1	2	1

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z_j n_j = \frac{1}{50}\Big[-1,23\times 2 + (-0,78\times 16) + (-0,34\times 12) + 0,11\times 6 +$$

$$+0,55\times 6 + 1\times 2 + 1,44\times 2 + 1,88\times 1 + 2,33\times 2 + 3,66\times 1\Big] = \frac{0}{50} = 0$$

Calcoliamo la varianza

$$\overline{z^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z^2{}_j n_j = \frac{1}{50}\Big[-1,23^2\times 2 + (-0,78)^2\times 16 + (-0,34)^2\times 12 + 0,11^2\times 6 +$$

$$+0,55^2\times 6 + 1^2\times 2 + 1,44^2\times 2 + 1,88^2\times 1 + 2,33^2\times 2 + 3,66^2\times 1\Big] =$$

$$= \frac{50}{50} = 1$$

$$\bar{z}^2 = (0)^2 = 0$$

$$s_z^2 = \overline{z^2} - \bar{z}^2 = 1 - 0 = 1$$

Calcoliamo l'asimmetria

z_i	n_i	z_i^3	$z_i^3 n_i$
-1,23	2	-1,846	-3,69
-0,78	16	-0,479	-7,66
-0,34	12	-0,039	-0,46
0,11	6	0,001	0,01
0,55	6	0,167	1,00
1,00	2	0,987	1,97
1,44	2	2,986	5,97
1,88	1	6,692	6,69
2,33	2	12,631	25,26
3,66	1	49,117	49,12
Totale	50		78,22

$$\gamma_1 = \overline{z^3} = \frac{1}{n}\sum_i z_i^3 n_i = \frac{78,22}{50} = 1,56$$ (asimmetria positiva)

N.B. Risulta anche verificata la disuguaglianza di Hotelling e Solomon:

$$|Media - Mediana| \leqslant S.Q.M.$$

$\overline{x} = 2,76 \qquad s = 2,25 \qquad Me = 2$

$$\left|2,76 - 2\right| = 0,76 \leq 2,25$$

L'indice di asimmetria di Hotelling e Solomon risulta:

$$A_{HS} = \frac{Media - Mediana}{S.Q.M.} = \frac{2,76 - 2}{2,25} = 0,34$$