Università degli Studi di Cassino
Anno accademico 2003-2004
Corsi di Statistica 1, II (Prof. G. Prozio) e Statistica 1, IV (Dott. D. Vistocco)

Esercitazione del 1/3/2004
Dott. Claudio Conversano

Esercizio 1

Un'urna bianca contiene una pallina rossa, una pallina bianca e una pallina blu. Descrivere lo spazio campionario (elencare gli eventi elementari) per ciascuno dei seguenti esperimenti:
1. estrazione di una pallina;
2. estrazione di due palline, rimettendo la prima pallina nell'urna prima di aver estratto la seconda (estrazione con ripetizione);
3. estrazione di due palline, senza reinserire la prima pallina nell'urna prima di aver estratto la seconda (estrazione senza ripetizione).

Svolgimento

Indicando con *R* l'evento "pallina rossa", con *B* l'evento "pallina bianca" e con *Blu* l'evento "pallina Blu" si ottiene:

1. Estrazione di una pallina

$$S = \{R, B, Blu\}$$

2. Estrazione di 2 palline con ripetizione:

$$S = \begin{Bmatrix} (R,R),(B,B),(Blu,Blu),(R,B),(R,Blu), \\ (B,R),(B,Blu),(Blu,R),(Blu,B) \end{Bmatrix}$$

3. Estrazione di 2 palline senza ripetizione:

$$S = \begin{Bmatrix} (R,B),(R,Blu), \\ (B,R),(B,Blu),(Blu,R),(Blu,B) \end{Bmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare tre volte una moneta.
1. descrivere lo spazio campionario dell'esperimento;
2. si descriva l'evento "si ottengono più croci che teste" come composizione di eventi elementari (utilizzando le operazioni/relazioni tra eventi).

Svolgimento

Indicando con *T* l'evento "Testa", e con *C* l'evento "croce" si ottiene:

1. spazio campionario

$$S = \begin{Bmatrix} (T,T,T),(T,C,T),(T,T,C),(C,T,T),(C,C,T) \\ (C,T,C),(T,C,C) \end{Bmatrix}$$

2. Si definisce l'evento *E* "si ottengono più croci che teste"

$$E = (T \cap T \cap T) \cup (T \cap C \cap T) \cup (T \cap T \cap C) \cup (C \cap T \cap T)$$

Esercizio 3 (Vistocco)

Un processo produttivo viene controllato da quattro revisori che valutano la qualità del prodotto. Ciascun revisore esprime un giudizio favorevole o contrario alla commercializzazione del prodotto. Il giudizio complessivo sul prodotto è espresso dalle quattro valutazioni. Il prodotto viene considerato commerciabile se almeno due giudizi sono favorevoli.
1. descrivere lo spazio campionario dell'esperimento "giudizio sul prodotto";
2. elencare gli eventi elementari che corrispondono all'evento "il prodotto è commerciabile";
3. elencare gli eventi elementari che corrispondono all'evento "i primi due revisori esprimono giudizio favorevole".

Svolgimento

Indicando con E_i *(i=1,2,3,4)* l'evento "giudizio positivo espresso dal giudice *i*" e con $\overline{E}_i$ l'evento "giudizio negativo espresso dal giudice i" si ottiene:

1. Spazio campionario dell'esperimento "giudizio sul prodotto".

$$S = \begin{Bmatrix} (E_1,E_2,E_3,E_4),(\overline{E}_1,E_2,E_3,E_4),(E_1,\overline{E}_2,E_3,E_4),(E_1,E_2,\overline{E}_3,E_4),(E_1,E_2,E_3,\overline{E}_4) \\ (\overline{E}_1,\overline{E}_2,E_3,E_4),(\overline{E}_1,E_2,\overline{E}_3,E_4),(\overline{E}_1,E_2,E_3,\overline{E}_4),(E_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3,E_4),(E_1,\overline{E}_2,E_3,\overline{E}_4), \\ (E_1,E_2,\overline{E}_3,\overline{E}_4),(\overline{E}_1,E_2,E_3,\overline{E}_4),(E_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3,E_4),(E_1,\overline{E}_2,E_3,\overline{E}_4),(E_1,E_2,\overline{E}_3,\overline{E}_4), \\ (\overline{E}_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3,E_4),(\overline{E}_1,E_2,\overline{E}_3,\overline{E}_4),(E_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3,\overline{E}_4),(\overline{E}_1,\overline{E}_2,\overline{E}_3,\overline{E}_4) \end{Bmatrix}$$

2. Eventi elementari che corrispondono all'evento H "il prodotto è commerciabile".

$$H = S - \begin{bmatrix} \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4\right) \cup \left(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4\right) \cup \\ \left(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap \overline{E}_4\right) \cup \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4\right) \end{bmatrix}$$

3. Eventi elementari che corrispondono all'evento F "i primi due revisori esprimono un giudizio favorevole".

$$F = \left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) \cup \left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4\right) \cup$$
$$\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \overline{E}_4\right) \cup \left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4\right)$$

Esercizio 4(Porzio)

Un'urna rossa contiene 3 palline bianche, 2 nere e 1 gialla. Si consideri l'estrazione di due palline. Si calcoli la probabilità di estrarre:

1. almeno una pallina nera;
2. due palline dello stesso colore;
3. una pallina bianca alla seconda estrazione;
4. due palline di colore diverso.

Le probabilità vanno calcolate nelle ipotesi di estrazione con e senza ripetizione.

Svolgimento

Indichiamo con:

- B_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina bianca nell'estrazione *i*"
- N_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina nera nell'estrazione *i*"
- G_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina gialla nell'estrazione *i*"

ESTRAZIONE CON RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$P(A) = P[N_1 \cap N_2] = P(N_1)P(N_2) = 2/6 \cdot 2/6 = 0{,}11$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$\begin{aligned}
&P(E) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap G_2)] = \\
&= P(N_1)P(N_2) + P(B_1)P(B_2) + P(G_1)P(G_2) = \\
&= 2/6 \cdot 2/6 + 3/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 1/6 = 0{,}389
\end{aligned}$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$\begin{aligned}
&P(F) = P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2)] = \\
&= P(B_1)P(B_2) + P(N_1)P(B_2) + P(G_1)P(B_2) = \\
&= 3/6 \cdot 3/6 + 2/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 3/6 = 0{,}361
\end{aligned}$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$\begin{aligned}
&P(G) = P[(B_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap N_2)] = \\
&= P(B_1)P(N_2) + P(B_1)P(G_2) + P(N_1)P(G_2) + P(N_1)P(B_2) + P(G_1)P(B_2) + P(G_1)P(N_2) = \\
&= 3/6 \cdot 2/6 + 3/6 \cdot 1/6 + 2/6 \cdot 1/6 + 2/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 3/6 = 0{,}639
\end{aligned}$$

ESTRAZIONE SENZA RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$\begin{aligned}
&P(A) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap \bar{N}_2) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2)] = \\
&= P(N_2 \mid N_1)P(N_1) + P(\bar{N}_2 \mid N_1)P(N_1) + P(N_2 \mid \bar{N}_1)P(\bar{N}_1) = \\
&= 2/6 \cdot 1/5 + 2/6 \cdot 4/5 + 4/6 \cdot 2/5 = 0{,}60
\end{aligned}$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$\begin{aligned}
&P(E) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)] = \\
&= P(N_2 \mid N_1)P(N_1) + P(B_2 \mid B_1)P(B_1) = \\
&= 2/6 \cdot 1/5 + 3/6 \cdot 2/5 = 0{,}22
\end{aligned}$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$P(F)=P\left[(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)\right]=$$
$$=P(N_1)P(B_2\mid N_1)+P(G_1)P(B_2\mid G_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=$$
$$=2/6\cdot 3/5+1/6\cdot 3/5+3/6\cdot 2/5=0,5$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$P(G)=P\left[(B_1\cap N_2)\cup(B_1\cap G_2)\cup(N_1\cap G_2)\cup(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(G_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid N_1)P(N_1)+$$
$$+P(B_2\mid N_1)P(N_1)+P(B_2\mid G_1)P(G_1)+P(N_2\mid G_1)P(G_1)$$
$$=2/5\cdot 3/6+1/5\cdot 3/6+1/5\cdot 2/6+3/5\cdot 2/6+3/5\cdot 1/6+2/5\cdot 1/6=0,73$$