

Università di Cassino
Corso di Statistica 1
Esercitazione del 05/12/2006
Dott. Alfonso Piscitelli

Esercizio 1

Si considerino i seguenti eventi: $N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{0,2,4,6,8\}$,
 $B = \{1,3,5,7,9\}$, $C = \{2,3,4,5\}$, $D = \{1,6,7\}$. Determinare:

- . • L'unione di A e C.
- . • L'intersezione di A e B.
- . • L'intersezione di A, C e D.
- . • Gli elementi contenuti in N ma non contenuti in C.

Soluzione

- . • $(A \cup C) = (0,2,4,6,8) \cup (2,3,4,5) = (0,2,3,4,5,6,8)$
- . • $(A \cap B) = (0,2,4,6,8) \cap (1,3,5,7,9) = \emptyset$
- . • $(A \cap C \cap D) = (0,2,4,6,8) \cap (2,3,4,5) \cap (1,6,7) = \emptyset$
- . • $(\overline{N \cap C}) = \overline{C} = (0,1,6,7,8,9)$

Esercizio 2

L'urna A contiene 3 palline rosse e 3 nere, l'urna B contiene 4 palline rosse e 6 nere. Calcolare:

- a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A.
- b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B.
- c) La probabilità che si estraggano due palline rosse dall'urna A (senza reintroduzione).

Soluzione

Indichiamo con:

$R_A = \{\text{la pallina estratta dall'urna A è rossa}\}$

$R_B = \{\text{la pallina estratta dall'urna B è rossa}\}$

a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A è: $P(R_A) = \frac{3}{6}$

b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B è: $P(R_B) = \frac{4}{10}$

c) $P\{\text{due palline rosse}\} = P\{\text{prima pallina estratta da A è rossa}\} + P\{\text{seconda pallina estratta da A è rossa} \mid \text{la prima era rossa}\} = P(R_A) * P(R_A \mid R_A) =$

$$= \frac{3}{6} * \frac{2}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Esercizio 3

Vi sono 100 studenti di un corso di Laurea in cui si studiano due lingue. Si sa che 50 studenti si sono iscritti per il Cinese e 70 si sono iscritti per il Russo. Qual è la probabilità che uno studente, selezionato a caso, studi "Cinese" o "Russo" o entrambe le lingue o almeno una delle due?

Soluzione

La probabilità che si verifichi uno dei due eventi è:

$$P(R) = \frac{70}{100} = 0,7$$

$$P(C) = \frac{50}{100} = 0,5$$

La probabilità che uno studente parli entrambe le lingue è data dall'intersezione delle due probabilità.

$$P(R \cap C) = P(R)P(C) = 0,7 * 0,5 = 0,35$$

La probabilità che uno studente parli almeno una delle due lingue è data dall'unione delle due probabilità, siccome gli eventi sono compatibili si ha:

$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = 0,7 + 0,5 - 0,35 = 0,85$$

Esercizio 4

Si consideri una scatola contenente 15 lampadine di cui 3 difettose, si prendano 3 lampadine (senza reimmissione) e si calcoli la probabilità che siano tutte e tre difettose.

Soluzione

Definito $E_i =$ "lampadina dell' i -ma estrazione è difettosa", la probabilità che la prima lampadina estratta sia difettosa è pari a

$$P(E_1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

La probabilità che anche la seconda lampadina estratta sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento E_1 , è pari a

$$P(E_2 | E_1) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

Infine la probabilità che la terza lampadina sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento E_1 e dell'evento E_2 (intersezione di entrambi gli eventi) è pari a

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{1}{13}.$$

Quindi la probabilità che le tre lampadine siano tutte difettose sarà pari a

$$P(A \cap B \cap C) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | E_1 \cap E_2) = 0,002$$

Esercizio 5

Tre agenti dell'F.B.I. ricevono un messaggio in codice. Supponendo che essi lavorino indipendentemente e che le rispettive probabilità di decifrare correttamente il messaggio siano 0,3 0,25 e 0,4, si calcoli la probabilità che il messaggio sia decifrato e che tutti e tre lo decifrano correttamente.

Soluzione

I tre eventi sono indipendenti e definite le tre probabilità si avrà:

A = Agente 1 decifra il messaggio

B = Agente 2 decifra il messaggio

C = Agente 3 decifra il messaggio

$$P(A)=0,3; \quad P(B)=0,25; \quad P(C)=0,40.$$

La probabilità che il messaggio sia decifrato è data dall'unione dei tre eventi. Sarà necessario che anche solo uno dei tre agenti riesca a decifrare il messaggio. Siccome i tre eventi non sono incompatibili (non si esclude che due oppure tutti e tre riescano a decifrare il messaggio) la probabilità sarà, quindi, pari a

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0,3 + 0,25 + 0,40 - 0,075 - 0,12 - 0,1 + 0,03 = 0,685$$

La probabilità, invece, che tutti gli agenti riescano a decifrare il messaggio è data dall'intersezione dei tre eventi. Tale probabilità sarà pari a:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0,03.$$

Esercizio 6

Una persona ha comprato uno dei 150 biglietti di una lotteria. La lotteria offre un primo premio, due secondi premi e tre terzi premi. Considerando che i premi sono estratti in successione decrescente, qual è la probabilità che il possessore vinca:

- a. Il primo premio
- b. Il secondo premio, dato che non ha vinto il primo.
- c. Il terzo premio, dato che non ha vinto né il primo né il secondo.

Soluzione

Definiti come segue i tre eventi

A = primo premio; B = secondo premio; C = terzo premio.

- a. La probabilità che il possessore vinca il primo premio è pari a

$$P(A) = \frac{1}{150} = 0,00666;$$

- b. Essendo già stato estratto il primo premio, non vinto dal possessore del biglietto, la probabilità che vinca il secondo premio è data dalla somma dei due secondi premi disponibili

$$P(B|A) = \frac{2}{149} + \frac{1}{148} = 0,02;$$

- c. La probabilità che vinca il terzo premio è data dalla somma dei tre terzi premi disponibili

$$P(C|A \cap B) = \frac{3}{147} + \frac{2}{146} + \frac{1}{145} = 0,04$$

Esercizio 7

Una famiglia possiede tre televisori: A, B e C. Le relative probabilità che si rompano in un certo periodo di tempo sono rispettivamente: 0,4; 0,1 e 0,2. Si calcoli la probabilità che in quel periodo:

- che siano tutte e tre rotti;
- che nessuno dei tre sia rotto;
- che un solo televisore sia rotto;
- che due televisori siano rotti;
- che non siano tutti e tre rotti.

Soluzione

Essendo gli eventi indipendenti, si ha:

a. La probabilità che i tre televisori siano rotti data dall'intersezione delle probabilità dei tre eventi $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0,008$;

b. La probabilità che nessun televisore sia rotto è data dall'intersezione della negazione dei tre eventi: $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,6 * 0,9 * 0,8 = 0,432$

c. La probabilità che solo un televisore sia rotto è data dalla somma delle intersezioni di un evento della negazione degli altri due:

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = 0,4 * 0,9 * 0,8 + 0,6 * 0,1 * 0,8 + 0,6 * 0,9 * 0,2 = 0,444$$

d. Facilmente si può calcolare anche il caso di due televisori rotti:

$$P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = 0,6 * 0,1 * 0,2 + 0,4 * 0,9 * 0,2 + 0,4 * 0,1 * 0,8 = 0,116$$

e. La negazione dell'intersezione dei tre eventi dà la probabilità che tutti e tre i televisori non siano rotti: $1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0,008 = 0,992$.