Università di Cassino
Corso di Statistica 1
Esercitazione del 03/12/2007
Dott. Alfonso Piscitelli

Esercizio 1

L'urna A contiene 3 palline rosse e 3 nere, l'urna B contiene 4 palline rosse e 6 nere. Calcolare:
a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A.
b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B.
c) La probabilità che si estraggano due palline rosse dall'urna A (senza reintroduzione).

<u>Soluzione</u>

Indichiamo con:
RA= {la pallina estratta dall'urna A è rossa}
RB = {la pallina estratta dall'urna B è rossa}

a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A è: $P(R_A) = \frac{3}{6}$

b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B è: $P(R_B) = \frac{4}{10}$

c) P{due palline rosse} = P{prima pallina estratta da A è rossa}+ P{seconda pallina estratta da A è rossa | la prima era rossa}= $P(R_A) * P(R_A \mid R_A) =$
$= \frac{3}{6} * \frac{2}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Esercizio 2

Vi sono 100 studenti di un corso di Laurea in cui si studiano due lingue. Si sa che 50 studenti si sono iscritti per il Cinese e 70 si sono iscritti per il Russo. Qual è la probabilità che uno studente, selezionato a caso, studi "Cinese" o "Russo" o entrambe le lingue o almeno una delle due?

Soluzione

La probabilità che si verifichi uno dei due eventi è:

$$P(R) = \frac{70}{100} = 0{,}7$$

$$P(C) = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

La probabilità che uno studente parli entrambe le lingue è data dall'intersezione delle due probabilità.

$$P(R \cap C) = P(R)P(C) = 0{,}7 * 0{,}5 = 0{,}35$$

La probabilità che uno studente parli almeno una delle due lingue è data dall'unione delle due probabilità, siccome gli eventi sono compatibili si ha:

$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}85$$

Esercizio 3

Si consideri una scatola contenente 15 lampadine di cui 3 difettose, si prendano 3 lampadine (senza reimissione) e si calcoli la probabilità che siano tutte e tre difettose.

Soluzione

Definito $E_i =$ "lampadina dell'i-ma estrazione è difettosa", la probabilità che la prima lampadina estratta sia difettosa è pari a

$$P(E_1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

La probabilità che anche la seconda lampadina estratta sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento E_1, è pari a

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

Infine la probabilità che la terza lampadina sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento E_1 e dell'evento E_2 (intersezione di entrambi gli eventi) è pari a

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{1}{13}.$$

Quindi la probabilità che le tre lampadine siano tutte difettose sarà pari a

$$P(A \cap B \cap C) = P(E_1)\, P(E_2 \mid E_1)\, P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = 0{,}002$$

Esercizio 4

Tre agenti dell'F.B.I. ricevono un messaggio in codice. Supponendo che essi lavorino indipendentemente e che le rispettive probabilità di decifrare correttamente il messaggio siano 0,3 0,25 e 0,4, si calcoli la probabilità che il messaggio sia decifrato e che tutti e tre lo decifrino correttamente.

Soluzione

I tre eventi sono indipendenti e definite le tre probabilità si avrà:

A = Agente 1 decifra il messaggio

B = Agente 2 decifra il messaggio

C = Agente 3 decifra il messaggio

P(A)=0,3; P(B)=0,25; P(C)=0,40.

La probabilità che il messaggio sia decifrato è data dall'unione dei tre eventi. Sarà necessario che anche solo uno dei tre agenti riesca a decifrare il messaggio. Siccome i tre eventi non sono incompatibili (non si esclude che due oppure tutti e tre riescano a decifrare il messaggio) la probabilità sarà, quindi, pari a

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}40 - 0{,}075 - 0{,}12 - 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}685$$

La probabilità, invece, che tutti gli agenti riescano a decifrare il messaggio è data dall'intersezione dei tre eventi. Tale probabilità sarà pari a:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}03.$$

Esercizio 5

Una persona ha comprato uno dei 150 biglietti di una lotteria. La lotteria offre un primo premio, due secondi premi e tre terzi premi. Considerando che i premi sono estratti in successione decrescente, qual è la probabilità che il possessore vinca:

a. Il primo premio
b. Il secondo premio, dato che non ha vinto il primo.
c. Il terzo premio, dato che non ha vinto né il primo né il secondo.

Soluzione

Definiti come segue i tre eventi

A = primo premio; B = secondo premio; C = terzo premio.

a. La probabilità che il possessore vinca il primo premio è pari a

$$P(A) = \frac{1}{150} = 0{,}00666;$$

b. Essendo già stato estratto il primo premio, non vinto dal possessore del biglietto, la probabilità che vinca il secondo premio è data dalla somma dei due secondi premi disponibili

$$P(B \mid A) = \frac{2}{149} + \frac{1}{148} = 0{,}02;$$

c. La probabilità che vinca il terzo premio è data dalla somma dei tre terzi premi disponibili

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{3}{147} + \frac{2}{146} + \frac{1}{145} = 0{,}04$$

Esercizio 6

Una famiglia possiede tre televisori: A, B e C. Le relative probabilità che si rompano in un certo periodo di tempo sono rispettivamente: 0,4; 0,1 e 0,2. Si calcoli la probabilità che in quel periodo:

a. che siano tutti e tre i televisori rotti;
b. che nessuno dei tre televisori sia rotto;
c. che un solo televisore sia rotto;
d. che due televisori siano rotti;
e. che non siano tutti e tre televisori rotti.

Soluzione

Essendo gli eventi indipendenti, si ha:

a. La probabilità che i tre televisori siano rotti data dall'intersezione delle probabilità dei tre eventi $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}008;$

b. La probabilità che nessun televisore sia rotto (che funzionano tutti) è data dall'intersezioni della negazione dei tre eventi:
$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0{,}6 * 0{,}9 * 0{,}8 = 0{,}432$$

c. La probabilità che solo un televisore sia rotto è data dalla somma delle intersezioni di un evento della negazione degli altri due:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 0{,}4 * 0{,}9 * 0{,}8 + 0{,}6 * 0{,}1 * 0{,}8 + 0{,}6 * 0{,}9 * 0{,}2 = 0{,}444$$

d. Facilmente si può calcolare anche il caso di due televisori rotti:

$$P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0{,}6 * 0{,}1 * 0{,}2 + 0{,}4 * 0{,}9 * 0{,}2 + 0{,}4 * 0{,}1 * 0{,}8 = 0{,}116$$

e. La negazione dell'intersezione dei tre eventi dà la probabilità che contemporaneamente tutti e tre i televisori non siano rotti:
$$1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$$.