Esercitazione eventi e probabilità

ESERCIZIO N. 1

Stabilisci se ognuno dei seguenti gruppi, relativi ad un'indagine sulla distribuzione dei redditi, potrebbe essere una lista di eventi elementari

(a)
r_1 = reddito basso = meno di 10.000 euro
r_2.= reddito medio = da 9.000 euro a 30.000 euro
r_3= reddito alto = oltre 30.000 euro
(b)
r_1 =reddito basso == meno di 10.000 euro
r_2.= reddito medio = da 10.000 euro a 30.000 euro
r_3= reddito alto = oltre 30.000 euro
(c)
r_1 = reddito basso = meno di 10.000 euro
r_2.= reddito medio = da 10.000 euro a 30.000 euro
r_3= reddito alto = da 30.000 euro a 60.000 euro

Soluzione

Una lista di eventi elementari deve essere ***completa*** e ***non ambigua***. La non ambiguità si traduce nell'assenza di intersezione tra i risultati. Nel caso della lista (a) c'è ambiguità perché i risultati r_1 e r_2 si intersecano; una persona con un reddito compreso tra 9.000 e 10.000 euro viene osservata come risultato r_1 e come risultato r_2. Quindi (a) non è una lista di risultati semplici. La lista (b) risulta invece non ambigua (perché non ci sono intersezioni tra i risultati) e completa, perché i risultati coprono tutti i redditi. La lista (c) è non ambigua ma non è completa perché i risultati non coprono tutti i redditi (è presumibile che una quota di persone abbia un reddito superiore a 60.000 euro).

ESERCIZIO N. 2

Si conduce un esperimento il cui risultato è valutato in termini di probabilità. Quale dei seguenti valori può considerarsi come probabilità del risultato?

a. 1/7; **b.** -1/4; **c.** 0,5; **d.** -0,10; **e.** 0;
f. 1,80; **g.** 1; **h.** 25%; **i.** 110%; **l.** 0,00005.

Soluzione

Ricordando che per ogni eventi e_i vale sempre $0 \leq P(e_i) \leq 1$, possono considerarsi come probabilità i valori contrassegnati dalle lettere:

a. **c.** **e.** **g.** **h.** **l.**

I valori indicati con le lettere **b** e **d** non rappresentano viceversa una probabilità perché sono valori minori di 0. Infine, i valori indicati con le lettere **f** e **i** non lo sono perché valori maggiori di 1.

ESERCIZIO N. 3

In una prova di esame universitario vengono poste tre domande. A ciascuna delle quali lo studente deve rispondere vero o falso. L'esame si considera superato se almeno due risposte sono esatte. Tenendo conto che gli studenti rispondono a caso, indicare la probabilità di superare l'esame.

Soluzione

Indichiamo con

V_i (i = 1,2,3) l'evento "risposta corretta alla domanda i "
S_i (i = 1,2,3) l'evento "risposta non corretta alla domada i "

1. S = Spazio campionario della prova di esame

$[(V_1 V_2 V_3),(S_1\ S_2\ S_3),(V_1 S_2 S_3), (V_1 V_2 S_3),(S_1 V_2 S_3) (V_1 S_2 V_3),(S_1\ S_2\ V_3),((S_1 V_2 V_3)]$

Definiamo l'evento A = "la prova di esame è superata "

$P (A) = [(V_1\cap V_2\cap V_3)U(V_1\cap V_2\cap S_3)U(V_1\cap S_2\cap V_3)U((S_1\cap V_2\cap V_3)]$

$= P(V_1) P(V_2) P(V_3)+ P(V_1) P(V_2) P(S_3)+(P(V_1) P(S_2) P(V_3)+ P(S_1) P(V_2) P(V_3) =$

$=(1/2) (1/2) (1/2)+ (1/2) (1/2) (1/2) +(1/2) (1/2) (1/2) + (1/2) (1/2) (1/2) = 0{,}5$

ESERCIZIO N. 4

Una scatola contiene 6 palline di cristallo, di cui due 3 sono bianche, 2 rosse e 1 gialla. Si consideri l'estrazione di due palline. Si calcoli la probabilità di estrarre

1. due palline nere
2. due palline dello stesso colore
3. una pallina bianca alle seconda estrazione
4. due palline di colore diverso

Le probabilità vanno calcolate nell'ipotesi di estrazione con o senza ripetizione

Soluzione

Indichiamo con

B_i (i = 1,2) l'evento "una pallina bianca nell'estrazione i "
N_i (i = 1,2) l'evento "una pallina nera nell'estrazione i "

G_i (i = 1,2) l'evento "una pallina gialla nell'estrazione i "

ESTRAZIONE CON RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento A = "2 palline nere"

$P(A) = P[N_1 \cap N_2] = P(N_1)\, P(N_2) = (2/6)\,(2/6) = 0{,}11$

2. Definiamo l'evento E = "due palline dello stesso colore"

$P(E) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)] \cup (G_1 \cap G_2)] = P(N_1)\, P(N_2) + P(B_1)\, P(B_2) + P(G_1)\, P(G_2) =$

$= (2/6)\,(2/6) + (3/6)\,(3/6) + (1/6)\,(1/6) = 0{,}389$

3. Definiamo l'evento F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$P(F) = P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] \cup (G_1 \cap B_2)] = P(B_1)\, P(B_2) + P(N_1)\, P(B_2) + P(G_1)\, P(B_2) =$

$= (3/6)\,(3/6) + (2/6)\,(3/6) + (1/6)\,(3/6) = O{,}361$

4. Definiamo l'evento G = " due palline di colore diverso"

$P(G) = P[(B_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap G_2)] \cup (N_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2)] \cup (G_1 \cap N_2) =$

$P(B_1)\, P(N_2) + P(B_1)\, P(G_2) + P(N_1)\, P(G_2) + P(N_1)\, P(B_2) + P(G_1)\, P(B_2) + P(G_1)\, P(N_2) =$

$= (3/6)\,(2/6) + (3/6)\,(1/6) + (2/6)\,(1/6) + (2/6)(3/6) + (1/6)(3/6) + (1/6)(3/6) = 0{,}639$

ESTRAZIONE SENZA CON RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento A = "2 palline nere"

$P(A) = P[N_1 \cap N_2] = P(N_1)\, P(N_2 \backslash N_1) = (2/6)\,(1/5) = 0{,}66$

2. Definiamo l'evento E = "due palline dello stesso colore"

$P(E) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)] = P(N_1)\, P(N_2 \backslash N_1) + P(B_1)\, P(B_2 \backslash B_1)) =$

$= (2/6)\,(1/5) + (3/6)\,(2/5) = 0{,}22$

3. Definiamo l'evento G = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$P(F) = P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] \cup (G_1 \cap B_2)] = P(B_1)\, P(B_2 \backslash B_1) + P(N_1)\, P(B_2 \backslash N_1) + P(G_1)\, P(B_2 \backslash G_1) = (3/6)\,(2/5) + (2/6)(3/5) + (1/6)(3/5) = 0{,}5$

4. Definiamo l'evento G = " due pallina di colore diverso"

$P(G) = P[(B_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap G_2)] \cup (N_1 \cap G_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2)] \cup (G_1 \cap N_2) =$

$P(B_1)\ P(N_2 \backslash B_1) + P(B_1)\ P(G_2 \backslash B_1) + P(N_1)\ P(G_2 \backslash N_1) + P(N_1)\ P(B_2 \backslash N_1) + P(G_1)\ P(B_2 \backslash G_1) + P(G_1)\ P(N_2 \backslash G_1) =$

$= (3/6)\ (2/5) + (3/6)\ (1/5) + (2/6)\ (1/5) + (2/6)(3/5) + (1/6)(3/5) + (1/6)(2/5) = 0{,}73$

ESERCIZIO N. 5

In un'indagine sugli alunni frequentanti la terza media condotta a Roma nel dicembre 2006 sono state raccolte alcune informazioni raccolte nella tabella seguente nella quale si confronta il sesso e l'intenzione di iscriversi al liceo o ad un altro tipo di scuola.

Sesso	Iscrizione al liceo (B_1)	Iscrizione ad un altro tipo di scuola (B_2)	Totale
Femmine (A_1)	66	34	100
Maschi (A_2)	50	66	116
Totale	116	100	216

Calcolare:

1) la probabilità che scegliendo uno studente a caso sia femmina;
2) la probabilità che scegliendo uno studente a caso questi sia maschio e non si voglia iscrivere al liceo
3) la probabilità che scegliendo uno studente a caso questi o sia femmina o non voglia iscriversi al liceo o entrambe le cosa

Soluzione

1) P(Femmina) = 100/216 = 0,46
2) P(Maschio ∩ Non liceo) = 66/216 = 0,31
3) P(Femmina U Non Liceo) = P(Femmina) + P(Non Liceo) - P(Femmina ∩ Non Liceo) = 100/216 + 100/216 - 34/216 = 0,7685