ESERCITAZIONE : PROBABILITA', VARIABILI CASUALI, BINOMIALE

ESERCIZIO N. 1

Una donna che si reca al lavoro in macchina ha osservato che il seguente modello è un approssimato modello probabilistico per il numero S di trovare un certo numero di semafori rossi durante il tragitto.

P (0 semafori rossi) = 0,05
P (1 semaforo rosso) = 0,20
P (2 semafori rossi) = 0,25
P (3 semafori rossi) = 0,35
P (4 semafori rossi) = 0,15

Trovare la probabilità che ella trovi:

(a) non più di un semaforo rosso;
(b) al massimo 3 semafori rossi;
(c) più di due semafori rossi.

Soluzione

Modello probabilistico

E	e_1= 0 semafori	e_2= 1 semaforo	e_3= 2 semafori	e_4= 3 semafori	e_5= 4 semafori
P(E)	0,05	0,20	0,25	0,35	0,15

a) P(non più di un semaforo) =

= P(e_1 = 0 semafori) + P(e_2 = 1 semaforo) = 0,05 + 0,20 = 0,25

b) P(al massimo tre semafori) =

= P(e_1 = 0 semafori) + P(e_2 = 1 semaforo) + P(e_3= 2 semafori) + P(e_4= 3 semafori) =

= 0, 05 + 0,20 + 0,25 + 0,35 = 0,85

c) P(più di due semafori) =

= P(e_4 = 3 semafori) + P(e_5 = 4 semafori) = 0, 35 + 0,15 = 0,50

ESERCIZIO N. 2

In un casinò un gioco consiste nel lanciare simultaneamente tre monete e nell'effettuare la somma dei punteggi ottenuti, considerando che il risultato "Testa" dia punteggio 1 e che il risultato "Croce" dia punteggio pari a 2. Si vince se il risultato ottenuto è maggiore di 4.
a) Rappresentare graficamente la funzione di densità della variabile che rappresenta i risultati del gioco.
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale definita al punto a

c) Calcolare la probabilità di vittoria effettuando una unica prova.

Indichiamo con

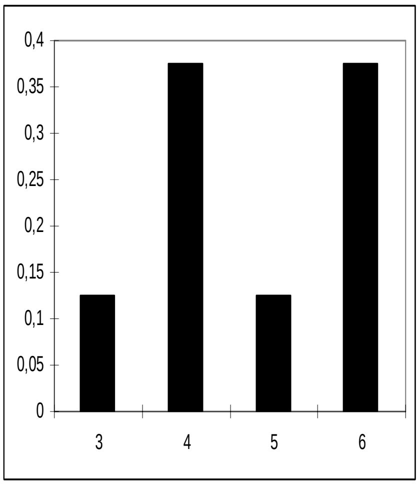
T_i (i = 1,2,3) l'evento "uscita testa alla moneta i "
C_i (i = 1,2,3) l'evento "uscita croce alla moneta i "

1. S = Spazio campionario del gioco

Se si considera per il lancio di una moneta 1 per il risultato "Testa"e 2 per il risultato "Croce
I punteggi ottenuti sono i seguenti : 3,6,5,5,5,4,4,4

Distribuzione variabile casuale
"Risultati del gioco"

X	P(X=x)
3	1/8
4	3/8
5	3/8
6	1/8



E(X) = (3 * 0,125) + (4*0,375) + (5*0,375) + (6*0,125) = 4,5
VAR (X) = [(9 * 0,125) + (16*0,375) + (25*0,375) + (36*0,125)] – (4,5 * 4,5) = 23,25-20,25 = 3

Si vince se il risultato ottenuto è maggiore di 4.

Definiamo l'evento A = "il gioco è vinto"

P (A) = $[(C_1 \cap C_2 \cap C_3) U (T_1 \cap C_2 \cap C_3) U (C_1 \cap C_2 \cap T_3) U (C_1 \cap T_2 \cap C_3)]$ = 3/8 + 1/8 = 0,5

ESERCIZIO N. 3

Il direttore del personale di un'azienda vuole valutare l'efficacia delle politiche di avviamento al lavoro A e B, avendo a disposizione i soli dati relativi al numero di mesi necessari per un completo inserimento dei nuovi assunti.

Tipo di politica	Numero mesi per l'inserimento			Totale
	12	24	36	
A	5	15	30	50
B	10	25	55	90
TOTALE	15	40	85	140

a) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso un dipendente addestrato con la politica A, questi sia stato inserito in produzione entro 24 mesi.
b) Calcolare la probabilità che, estraendo a caso un dipendente, questi sia stato inserito in produzione entro 24 mesi e sia stato addestrato con la politica B.
c) Se si estraggono 5 dipendenti, calcolare la probabilità che almeno 2 siano stati inseriti nell'arco dei primi 24 mesi.

SOLUZIONE

a) P(entro 24 mesi | politica A) = (20/50) = 0,40

b) P(entro 24 mesi $\cap$ politica B) = (10+25)/140 = 0,25

c) Se si estraggono 5 dipendenti calcolare la probabilità che almeno 2 siano stati inseriti nell'arco dei primi 24 mesi

X ~ Bin(n, p)

n = numero di prove (in questo caso 5)

p = probabilità di successo (in questo caso pari a 55/140 cioè a 0,39)

1-p = probabilità di insuccesso (in questo caso pari a 85/140 cioè a 0,61)

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,...,n$$

La probabilità che almeno 2 dei dipendenti siano stati inseriti nell'arco dei primi 24 mesi

$$(P(2 \le x \le 5) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$$

$$P(x=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}39^2\cdot 0{,}61^{5-2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 0{,}39^2\cdot 0{,}61^3=10\cdot 0{,}39^2\cdot 0{,}61^3=10\cdot 0{,}15\cdot 0{,}23=0{,}34$$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}39^3\cdot 0{,}61^2=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot 0{,}39^3\cdot 0{,}61^2=10\cdot 0{,}39^3\cdot 0{,}61^2=10\cdot 0{,}06\cdot 0{,}37=0{,}22$$

$$P(x=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}39^4\cdot 0{,}61^{5-1}=\frac{5!}{4!(5-4)!}\cdot 0{,}39^4\cdot 0{,}61^1=5\cdot 0{,}39^4\cdot 0{,}61=5\cdot 0{,}02\cdot 0{,}61=0{,}075$$

$$P(x=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}39^5\cdot 0{,}61^{5-0}=\frac{5!}{5!(5-5)!}\cdot 0{,}39^5\cdot 0{,}61^0=1\cdot 0{,}39^5\cdot 1=1\cdot 0{,}01\cdot 1=0{,}01$$

$$P(2\le x\le 5)=P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)=0{,}34+0{,}22+0{,}075+0{,}01=0{,}65$$

<u>ESERCIZIO N. 4</u>

Considerato che la probabilità di nascere maschio è pari a 0,52, e dunque quella di nascere femmina è pari a 0,48, determinare la probabilità che in una famiglia di 5 figli almeno uno sia maschio

.

SOLUZIONE

Il parto può essere considerato come un evento ripetuto (in questo caso si ripete 5 volte perché sono stati generati 5 figli). Se consideriamo la variabile casuale discreta X che conta il numero di maschi (successi) ottenuto su 5 parti, allora X è una variabile casuale binomiale con parametri (n=5 e p=0,52). In particolare:

X ~ Bin(n, p)

n = numero di prove

p = probabilità di successo (in questo caso pari 0,52)

1-p = probabilità di insuccesso (in questo caso pari 0,48)

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x},\qquad x=0,1,...,n$$

La probabilità che almeno uno dei figli sia maschio vuol dire

$$(P(1\le x\le 5)=P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)$$

$$P(x=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}52^1\cdot 0{,}48^{5-1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot 0{,}52^1\cdot 0{,}48^4=5\cdot 0{,}52\cdot 0{,}48^4=5\cdot 0{,}52\cdot 0{,}05=0{,}13$$

$$P(x=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}52^2\cdot 0{,}48^{5-2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 0{,}52^2\cdot 048^3=10\cdot 0{,}52^2\cdot 0{,}48^3=10\cdot 0{,}27\cdot 0{,}11=0{,}30$$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}52^{3}\cdot 0{,}48^{2}=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot 0{,}52^{3}\cdot 0{,}48^{2}=10\cdot 0{,}52^{3}\cdot 0{,}48^{2}=10\cdot 0{,}14\cdot 0{,}23=0{,}32$$

$$P(x=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}52^{4}\cdot 0{,}48^{5-1}=\frac{5!}{4!(5-4)!}\cdot 0{,}52^{4}\cdot 0{,}48^{1}=5\cdot 0{,}52^{4}\cdot 0{,}48=5\cdot 0{,}07\cdot 0{,}48=0{,}17\,5$$

$$P(x=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}52^{5}\cdot 0{,}48^{5-0}=\frac{5!}{5!(5-5)!}\cdot 0{,}52^{5}\cdot 0{,}48^{0}=1\cdot 0{,}52^{5}\cdot 1=1\cdot 0{,}04\cdot 1=0{,}04$$

$$P(1\le x\le 5)=P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)=0{,}13+0{,}29+0{,}32+0{,}17+0{,}04=0{,}95$$