



Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Esercitazione 5

Statistica

Alfonso Iodice D'Enza
iodicede@gmail.com

Università degli studi di Cassino



Outline

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

1 La concentrazione



La concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

In caso di caratteri trasferibili è interessante considerare il grado di vicinanza all'equidistribuzione, situazione in cui tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere. La **concentrazione** indica quanto il collettivo osservato sia 'lontano/vicino' rispetto all'equidistribuzione. Da cui,

- la concentrazione è pari a 0 se tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere
- la concentrazione è massima se l'intero ammontare del carattere è detenuto da una sola osservazione



La concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

In caso di caratteri trasferibili è interessante considerare il grado di vicinanza all'equidistribuzione, situazione in cui tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere. La **concentrazione** indica quanto il collettivo osservato sia 'lontano/vicino' rispetto all'equidistribuzione. Da cui,

- la concentrazione è pari a 0 se tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere
- la concentrazione è massima se l'intero ammontare del carattere è detenuto da una sola osservazione



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concen-
trazione

Si consideri un carattere trasferibile (reddito, risorsa) distribuito tra n modalità, si considerino poi p_i e q_i , rispettivamente:

$$p_i = \frac{i}{n}$$

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concen-
trazione

Si consideri un carattere trasferibile (reddito, risorsa) distribuito tra n modalità, si considerino poi p_i e q_i , rispettivamente:

$$p_i = \frac{i}{n}$$

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

- p_i è la frazione cumulata dei primi i redditieri
- q_i , ammontare del reddito detenuto dai primi i redditieri



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concen-
trazione

Le differenze $(p_i - q_i) \geq 0$, sono misure dirette della concentrazione. La media aritmetica della versione normalizzata di tali differenze rappresenta il **rapporto di concentrazione di Gini**.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p_i - q_i}{p_i}\right) p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i}$$

Esempio di calcolo concentrazione

Si considerino i fatturati in milioni di euro di un collettivo di otto aziende produttrici di componenti per auto.

i	x_i	$x_{i,(ord.)}$	$\sum_{j=1}^i x_j$	$p_i = \frac{i}{n}$	$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$	$p_i - q_i$
1	154	8	8	0.125	0.018	0.107
2	14	12	20	0.250	0.046	0.204
3	16	14	34	0.375	0.078	0.297
4	8	16	50	0.500	0.115	0.385
5	164	20	70	0.625	0.161	0.464
6	12	46	116	0.750	0.267	0.483
7	20	154	270	0.875	0.622	0.253
8	46	164	434	1	1	0
		434				

NOTA: le modalità x_i devono preventivamente essere ordinate in modo crescente

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} &= \frac{0.107 + 0.204 + 0.297 + 0.385 + 0.464 + 0.483 + 0.253}{0.125 + 0.25 + 0.375 + 0.5 + 0.625 + 0.75 + 0.875} = \\ &= \frac{2.193}{3.5} = 0.627 \end{aligned}$$



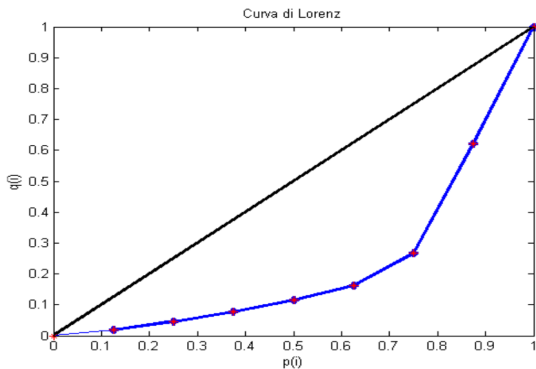
Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





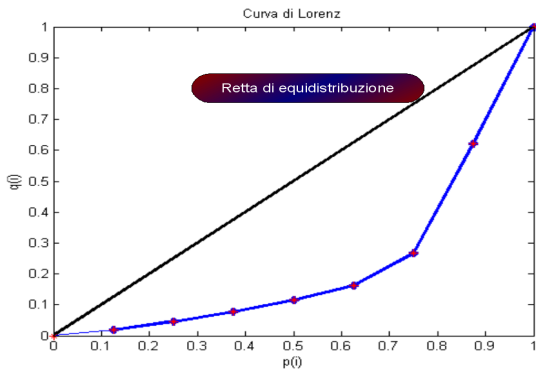
Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





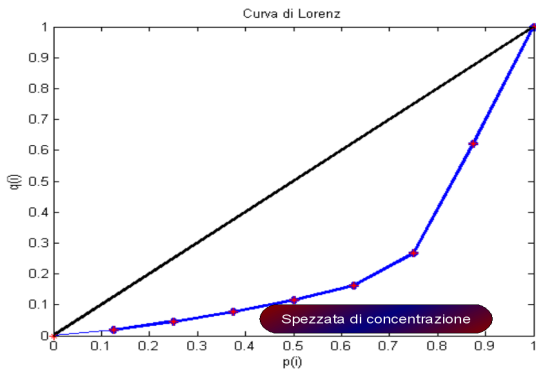
Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





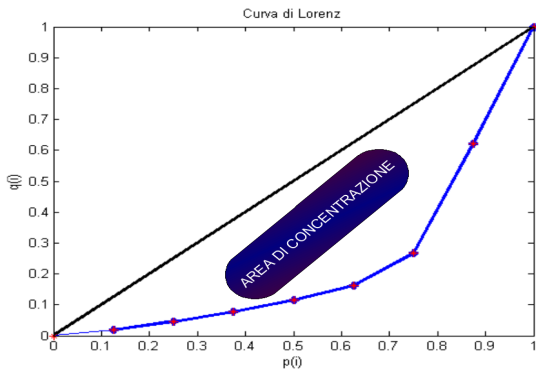
Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





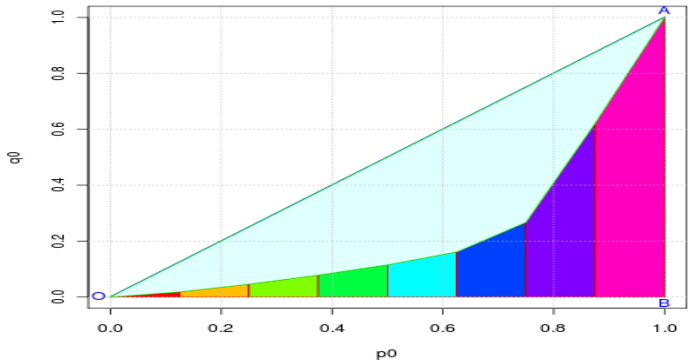
Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione 5

A. Iodice

La concentrazione

$$R = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area del triangolo } OAB} = \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB}$$





Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

$$R = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area del triangolo } OAB} = \frac{\overbrace{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}^{\text{area di concentrazione}}}{\text{area del triangolo } OAB}$$

- area del triangolo OAB : $\frac{OB \times BA}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$
- area di un generico trapezio: $\frac{(B+b) \times h}{2}$
 - B = base maggiore = q_{i+1}
 - b = base minore = q_i
 - h = altezza = $p_{i+1} - p_i$

- **somma** delle aree dei trapezi: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\overbrace{(q_{i+1} + q_i)}^{B+b} \times \overbrace{(p_{i+1} - p_i)}^h}{2}$

sostituendo quanto trovato, si ha

$$\begin{aligned} R &= \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i)}{2}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

con qualche passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i)}{2}}{\frac{1}{2}} = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{mettere } 1/2 \text{ in evidenza}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) \right)}{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) \end{aligned}$$

Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

con qualche **altro** passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) = \\ &= 1 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1}p_{i+1} - q_{i+1}p_i + q_i p_{i+1} - q_i p_i)}_{\text{effettuando i prodotti}} \\ &= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i \right) \end{aligned}$$

poichè:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i = q_n p_n$$

ed essendo $q_n = 1$ e $p_n = 1$ allora $q_n p_n = 1$, da cui



Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

con qualche altro passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= 1 - \left(\overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i}^{q_n p_n = 1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} \right) \\ &= 1 - \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} \right) \\ &= 1 - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) \end{aligned}$$



La concentrazione in dati raggruppati

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Si consideri di voler studiare la concentrazione di addetti rispetto alle imprese avendo a disposizione informazioni riguardanti le classi di addetti per impresa, il numero di imprese per ciascuna classe n_i , il numero di addetti impiegati $x_i n_i$.

In questo caso si deve tenere conto del fatto che i dati sono organizzati in frequenze.

$i.i$	n_i	$\sum n_i$	$x_i n_i$	$\sum x_i$	p_i	q_i	a	b	$a - b$
0-2	2043	2043	2718.3	2718.3	0.7177	0.2444	0.3590	0.2300	0.1290
3-9	636	2679	2845.6	5563.9	0.9412	0.5002	0.5852	0.4889	0.0963
10-19	103.2	2782.2	1352	6915.9	0.9774	0.6217	0.7203	0.6172	0.1031
20-49	43.4	2825.6	1281.2	8197.1	0.9927	0.7369	0.8037	0.7346	0.0691
50-99	11.8	2837.4	808.7	9005.8	0.9968	0.8096	0.9494	0.8094	0.1400
100-499	8.3	2845.7	1588.3	10594.1	0.9997	0.9524	0.9997	0.9524	0.0473
500-999	0.8	2846.5	529.4	11123.5	1	1			

Table: I dati sono espressi in migliaia.

$$a = p_i q_{i+1}$$

$$b = p_{i+1} q_i$$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{n-1} (p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) = 0.5848$$