



Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della misura di concentrazione

Rappresentazione grafica della concentrazione

Metodo grafico

Concentrazione in dati raggruppati

Esercitazione 5

Statistica

Alfonso Iodice D'Enza
iodicede@gmail.com

Università degli studi di Cassino



Outline

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

- 1 La concentrazione
- 2 Calcolo della misura di concentrazione
- 3 Rappresentazione grafica della concentrazione
- 4 Metodo grafico
- 5 Concentrazione in dati raggruppati



La concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Calcolo della
misura di con-
centrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

In caso di caratteri trasferibili è interessante considerare il grado di vicinanza all'equidistribuzione, situazione in cui tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere. La **concentrazione** indica quanto il collettivo osservato sia 'lontano/vicino' rispetto all'equidistribuzione. Da cui,

- la concentrazione è pari a 0 se tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere
- la concentrazione è massima se l'intero ammontare del carattere è detenuto da una sola osservazione



La concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

In caso di caratteri trasferibili è interessante considerare il grado di vicinanza all'equidistribuzione, situazione in cui tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere. La **concentrazione** indica quanto il collettivo osservato sia 'lontano/vicino' rispetto all'equidistribuzione. Da cui,

- la concentrazione è pari a 0 se tutte le unità detengono lo stesso ammontare del carattere
- la concentrazione è massima se l'intero ammontare del carattere è detenuto da una sola osservazione



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concen-
trazione

Calcolo della
misura di con-
centrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Si consideri un carattere trasferibile (reddito, risorsa) distribuito tra n modalità, si considerino poi p_i e q_i , rispettivamente:

$$p_i = \frac{i}{n}$$

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concen-
trazione

Calcolo della
misura di con-
centrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Si consideri un carattere trasferibile (reddito, risorsa) distribuito tra n modalità, si considerino poi p_i e q_i , rispettivamente:

$$p_i = \frac{i}{n}$$

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

- p_i è la frazione cumulata dei primi i redditieri
- q_i , ammontare del reddito detenuto dai primi i redditieri



Indice di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concen-
trazione

Calcolo della
misura di con-
centrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Le differenze $(p_i - q_i) \geq 0$, sono misure dirette della concentrazione. La media aritmetica della versione normalizzata di tali differenze rappresenta il **rapporto di concentrazione di Gini**.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p_i - q_i}{p_i}\right) p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i}$$

Esempio di calcolo concentrazione

Si considerino i fatturati in milioni di euro di un collettivo di otto aziende produttrici di componenti per auto.

i	x_i	$x_{i,(ord.)}$	$\sum_{j=1}^i x_j$	$p_i = \frac{i}{n}$	$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$	$p_i - q_i$
1	154	8	8	0.125	0.018	0.107
2	14	12	20	0.250	0.046	0.204
3	16	14	34	0.375	0.078	0.297
4	8	16	50	0.500	0.115	0.385
5	164	20	70	0.625	0.161	0.464
6	12	46	116	0.750	0.267	0.483
7	20	154	270	0.875	0.622	0.253
8	46	164	434	1	1	0
		434				

NOTA: le modalità x_i devono preventivamente essere ordinate in modo crescente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{0.107 + 0.204 + 0.297 + 0.385 + 0.464 + 0.483 + 0.253}{0.125 + 0.25 + 0.375 + 0.5 + 0.625 + 0.75 + 0.875} = \frac{2.193}{3.5} = 0.627$$



Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

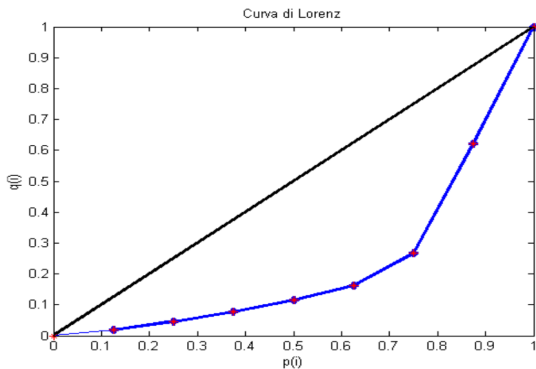
Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

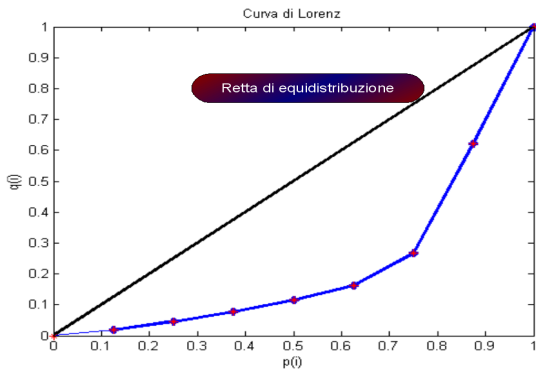
Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

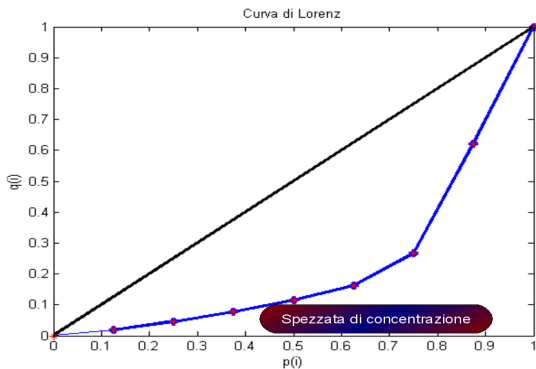
Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





Rappresentazione grafica: la curva di Lorenz

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

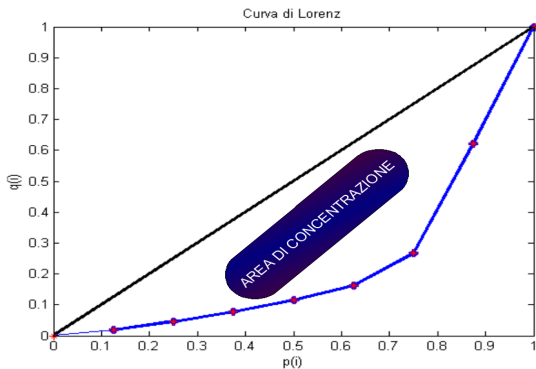
Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Partendo dai dati nell'esempio precedente, la curva di Lorenz è la spezzata passante per i punti di coordinate (p_i, q_i) .





Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

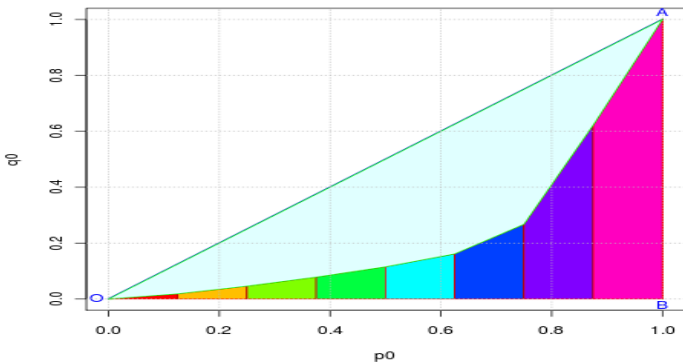
Calcolo della misura di concentrazione

Rappresentazione grafica della concentrazione

Metodo grafico

Concentrazione in dati raggruppati

$$R = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area del triangolo } OAB} = \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB}$$





Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della misura di concentrazione

Rappresentazione grafica della concentrazione

Metodo grafico

Concentrazione in dati raggruppati

$$R = \frac{\text{area di concentrazione}}{\text{area del triangolo } OAB} = \frac{\overbrace{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}^{\text{area di concentrazione}}}{\text{area del triangolo } OAB}$$

- **area del triangolo OAB :** $\frac{OB \times BA}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

- **area di un generico trapezio:** $\frac{(B+b) \times h}{2}$

- B = base maggiore = q_{i+1}

- b = base minore = q_i

- h = altezza = $p_{i+1} - p_i$

- **somma delle aree dei trapezi:** $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\overbrace{(q_{i+1} + q_i)}^{B+b} \times \overbrace{(p_{i+1} - p_i)}^h}{2}$

sostituendo quanto trovato, si ha

$$\begin{aligned} R &= \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i)}{2}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della misura di concentrazione

Rappresentazione grafica della concentrazione

Metodo grafico

Concentrazione in dati raggruppati

con qualche passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= \frac{\text{area del triangolo } OAB - \text{somma dei trapezi}}{\text{area del triangolo } OAB} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i)}{2}}{\frac{1}{2}} = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{mettere } 1/2 \text{ in evidenza}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) \right)}{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) \end{aligned}$$



Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Indice

La concentrazione

Calcolo della misura di concentrazione

Rappresentazione grafica della concentrazione

Metodo grafico

Concentrazione in dati raggruppati

con qualche altro passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} + q_i) \times (p_{i+1} - p_i) = \\ &= 1 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1}p_{i+1} - q_{i+1}p_i + q_i p_{i+1} - q_i p_i)}_{\text{effettuando i prodotti}} \\ &= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i \right) \end{aligned}$$

poichè:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i = q_n p_n$$

ed essendo $q_n = 1$ e $p_n = 1$ allora $q_n p_n = 1$, da cui



Metodo grafico per determinare il rapporto di concentrazione

Esercitazione
5

A. Iodice

La concentrazione

Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

con qualche altro passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} R &= 1 - \left(\overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_i}^{q_n p_n = 1} - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} \right) \\ &= 1 - \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i + \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} \right) \\ &= 1 - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}p_i - \sum_{i=1}^{n-1} q_i p_{i+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) \end{aligned}$$



La concentrazione in dati raggruppati

Esercitazione
5

A. lode

La concentrazione

Calcolo della
misura di concentrazione

Rappresentazione
grafica della
concentrazione

Metodo
grafico

Concentrazione
in dati
raggruppati

Si consideri di voler studiare la concentrazione di addetti rispetto alle imprese avendo a disposizione informazioni riguardanti le classi di addetti per impresa, il numero di imprese per ciascuna classe n_i , il numero di addetti impiegati $x_i n_i$.

In questo caso si deve tenere conto del fatto che i dati sono organizzati in frequenze.

$i.i$	n_i	$\sum n_i$	$x_i n_i$	$\sum x_i$	p_i	q_i	a	b	$a - b$
0-2	2043	2043	2718.3	2718.3	0.7177	0.2444	0.3590	0.2300	0.1290
3-9	636	2679	2845.6	5563.9	0.9412	0.5002	0.5852	0.4889	0.0963
10-19	103.2	2782.2	1352	6915.9	0.9774	0.6217	0.7203	0.6172	0.1031
20-49	43.4	2825.6	1281.2	8197.1	0.9927	0.7369	0.8037	0.7346	0.0691
50-99	11.8	2837.4	808.7	9005.8	0.9968	0.8096	0.9494	0.8094	0.1400
100-499	8.3	2845.7	1588.3	10594.1	0.9997	0.9524	0.9997	0.9524	0.0473
500-999	0.8	2846.5	529.4	11123.5	1	1			

Table: I dati sono espressi in migliaia.

$$a = p_i q_{i+1}$$

$$b = p_{i+1} q_i$$

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{n-1} (p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i) = 0.5848$$