CORSO DI STATISTICA (parte 1) - ESERCITAZIONE 8

Dott.ssa Antonella Costanzo

a.costanzo@unicas.it

Esercizio 1. La v.c. Normale, uso delle tavole

Sia X una v.c. che segue una distribuzione Normale con media pari a 4 e scarto quadratico medio uguale a 0.75. Determinare:

a) $P(X \leq 2)$

b) $P(X > 5)$

c) $P(2 \leq X < 5)$

d) $P(X = 3)$

Sol.

a) Indichiamo con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{2-4}{0.75} = -2.67$ la v.c. Normale standardizzata, allora

$$P(X \leq 2) = P\left(Z \leq \frac{2-4}{0.75}\right) = P(Z \leq -2.67) = 1 - P(Z \leq 2.67) = 1 - 0.9962 = 0.0038$$

b) Indichiamo con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{5-4}{0.75} = 1.33$ la v.c. Normale standardizzata, allora

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-4}{0.75}\right) = P(Z > 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

c) $P(2 \leq X < 5) = P\left(\frac{2-4}{0.75} \leq Z \leq \frac{5-4}{0.75}\right) = P(-2.66 \leq Z \leq 1.33) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq -2.66) =$

$$= P(Z \leq 1.33) - [1 - P(Z \leq 2.66)] = 0.9082 - [1 - 0.9961] = 0.9082 - 0.0039 = 0.9043$$

d)$P(X = 3) = \emptyset$

Esercizio 2. Calcolare i percentili della v.c. Normale

Per v.c. normale standardizzata

Trovare a) il 75 esimo percentile per una v.c. Normale standardizzata.

Sol.

a) Il 75-esimo percentile $z_{0.25}$ corrisponde a quel valore per cui:

$$P(Z > z_{0.75}) = 0.25$$

Oppure (più agevolmente a partire dalle tavole): $P(Z < z_{0.75}) = 0.75$

Il valore più vicino a 0.75 sulle tavole della distribuzione normale standard è 0.7486 che corrisponde al valore 0.675 circa.

Per v.c. normale non standardizzata

Data una normale X di parametri μ=10 e σ^2=4, determinare: a) il primo decile, b) la probabilità che X sia maggiore del valore 11,5.

Sol.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Nel nostro caso $X \sim N(10, 4)$

a) Primo decile (corrisponde al 90 esimo percentile):

$$P(Z > z_{0.90}) = 0.10$$

Oppure (più agevolmente a partire dalle tavole): $P(Z < z_{0.90}) = 0.90$

Dalle tavole risulta che il valore più vicino a 0.9 è compreso tra 1.28 e 1.29, per cui approssimando il valore

$z_{0.9} = -1.285$ (per la proprietà di simmetria)

Partendo dalla versione standardizzata di X otteniamo che il primo decile corrisponde alla seguente:

$$X_{0.10} = \mu + \sigma(z_{0.9}) = 10 + 2(-1.285) = 7.43$$

b) In tal caso occorre determinare l'area che il particolare valore 11.5 lascia alla sua sinistra nella tavola della distribuzione Normale standardizzata.

$$P(X > 11.5) = P\left(Z > \frac{11.5 - 10}{2}\right) = P(Z > 0.75) = 1 - P(Z < 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

Esercizio 3. Applicazioni v.c Normale

In uno zuccherificio le confezioni di zucchero vengono realizzate automaticamente e il peso X di ogni confezione è una v.c. normale con parametri $\mu = 500\ g$ e $\sigma = 2\ g$. Calcolare la probabilità che il peso di una confezione:

a) sia inferiore a 504 g

b) sia almeno pari a 498 g

c) sia compreso tra 495 g e 506 g

d) sia compreso tra 501 g e 503 g

e) calcolare il peso x_0 per il quale la probabilità che la macchina eroghi una quantità di zucchero maggiore di x_0 è pari a 0.14.

Sol.

a) $P(X < 504) = P\left(Z < \frac{504-500}{2}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$

b)$P(X \geq 498) = P\left(Z \geq \frac{498-500}{2}\right) = P(Z \geq -1) = 1 - P(Z \leq -1) = 1 - [1 - P(Z \leq 1)] =$

$$= 1 - (1 - 0.8413) = 0.8413$$

c)$P(495 \leq X \leq 506) = P\left(\frac{495-500}{2} \leq Z \leq \frac{506-500}{2}\right) = P(-2.5 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -2.5) =$

$$= P(Z \leq 3) - [1 - P(Z \leq 2.5)] = 0.9987 - (1 - 0.9938) = 0.9925$$

d) $P(501 \leq X \leq 503) = P\left(\frac{501-500}{2} \leq Z \leq \frac{503-500}{2}\right) = P(0.5 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0.5) =$

$$= 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$$

e) Dobbiamo determinare un x_0 tale che

$Pr(X > x_0\ ) = 0.14$ oppure $Pr(X \leq x_0\ ) = 1 - Pr(X > x_0\ ) = 1 - 0.14 = 0.86$

$$Pr(X \leq x_0\ ) = \Pr\left(Z \leq \frac{x_0\ - 500}{2}\right) = 0.86$$

Dalla tavola della normale standardizzata il valore di probabilità più vicino a 0.86 è 0.8599 che corrisponde all'ascissa 1.08, quindi:

$$x_0 = 500 + 2(1.08) = 502.16$$

Esercizio 4. Proprietà della combinazione lineare di v.c. Normali

Un prodotto industriale si ottiene dall'assemblaggio di tre componenti. Il peso complessivo del prodotto Y è ottenuto come somma dei pesi X,V,W delle sue tre componenti. Data la variabilità del processo si può assumere che i tre pesi siano indipendenti e, espressi in grammi, si distribuiscano come normali di medie 2, 4 e 3 e varianze 0.01, 0.02, 0.02 rispettivamente. Determinare la probabilità che il peso del singolo prodotto soddisfi lo standard qualitativo prefissato: 9 ± 0.25.

Sol.

$Y = X + V + W$ è una v.c. somma di n=3 v.c. normali indipendenti.

Per la proprietà riproduttiva della normale, la somma di n v.c. casuali indipendenti è ancora una v.c. normale con i seguenti parametri:

$E(Y) = E(X) + E(V) + E(W) = 9$

$Var(Y) = Var(X) + Var(V) + Var(W) = 0.05$ essendo X, V e W indipendenti.

Per cui $Y \sim N(9, 0.05)$

Dobbiamo determinare: $P(9 - 0.25 \leq Y \leq 9 + 0.25)$, ciò corrisponde a risolvere il seguente:

$$P\left(\frac{8.75 - 9}{\sqrt{0.05}} \leq Z \leq \frac{9.25 - 9}{\sqrt{0.05}}\right) = P(-1.14 \leq Z \leq 1.14) = P(Z \leq 1.14) - P(Z \leq -1.14) =$$

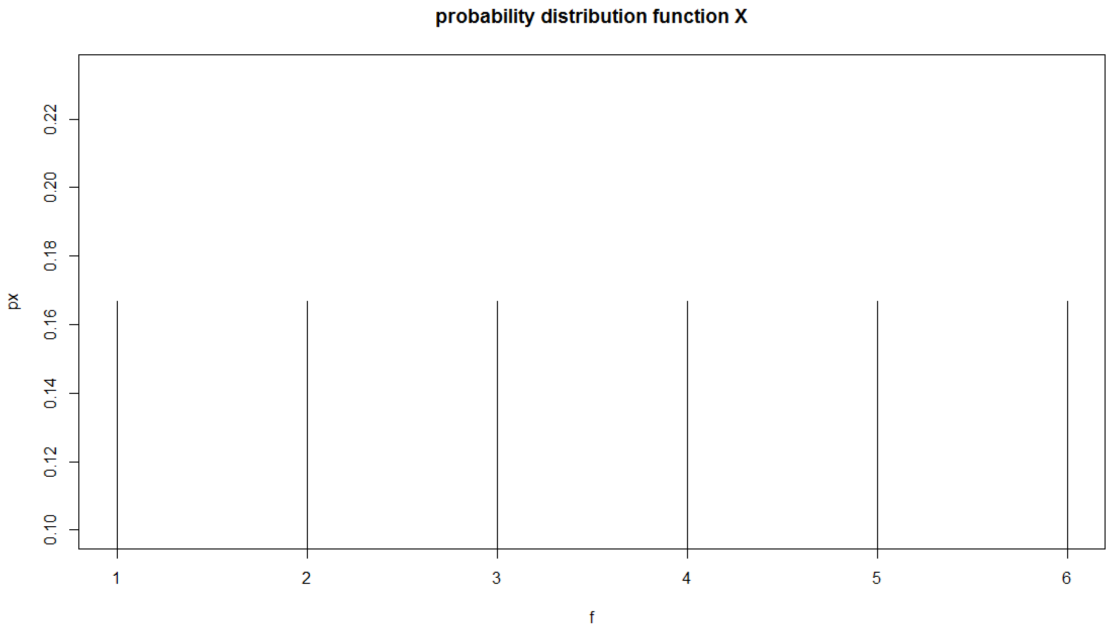
$$= P(Z \leq 1.14) - [1 - P(Z \leq 1.14)] = 0.8729 - 0.1271 = 0.7458$$

Nota: solo la.v.c. Normale gode della proprietà riproduttiva per cui ogni trasformazione lineare di una v.c. distribuita normalmente è ancora una v.c. che segue la stessa distribuzione (normale).

Consideriamo, ad esempio, la v.c. X="lancio di un dado" e la v.c. Y="somma di due dadi". La v.c. Y è ottenuta a partire dalla somma per i=1,2 delle v.c. X (Y è una combinazione lineare di X)

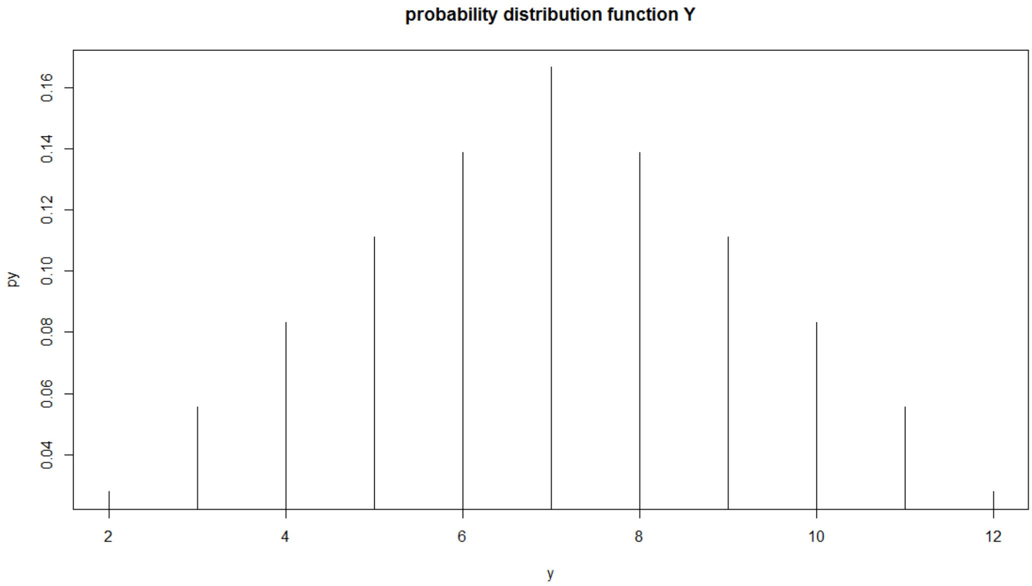
x	p_x
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

La distribuzione di probabilità di X è riconducibile ad un modello uniforme discreto.



Distribuzione di probabilità di $Y = \sum_{i=1}^{2} X_i$

x	p_x
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Da questo grafico risulta che Y, combinazione lineare di X, non "preserva" la distribuzione di partenza (nota) della X. Ciò vuol dire, nel caso in esame, che la somma di due o più variabili casuali note non necessariamente da luogo alla stessa variabile casuale di partenza. L'unica eccezione è rappresentata dalla v.c.Normale.