CORSO DI STATISTICA (parte 1) - ESERCITAZIONE 7

Dott.ssa Antonella Costanzo

a.costanzo@unicas.it

Esercizio 1. Calcolo delle probabilità

Il Sig. Rossi abita nella città X e lavora nella città Y , poco distante. Per recarsi sul posto di lavoro, egli utilizza l'auto il 60% delle volte, mentre per il restante 40% usa il treno. Con l'auto, la probabilità di arrivare in ritardo è del 45%, mentre con il treno è del 55%

a) Quanto vale la probabilità che il Sig. Rossi prenda il treno e arrivi puntuale?

b) Quanto vale la probabilità che il Sig. Rossi arrivi in ritardo?

Sol.

Indichiamo B1 l'evento "il sig. Rossi utilizza l'auto", B2 l'evento il sig. Rossi utilizza il treno" ed A l'evento il "sig. Rossi arriva in ritardo"

a) $P(\bar{A} \cap B_2) = P(\bar{A}|B_2)P(B_2) = 0.45 \times 0.4 = 0.18$

b) $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0.45 \times 0.6 + 0.55 \times 0.4 = 0.49$

Esercizio 2. Probabilità e tabelle a doppia entrata

Una società farmaceutica svolge un'indagine per valutare se esiste dipendenza tra la presenza di una certa malattia e la somministrazione di un certo farmaco. A tal fine contatta 80 pazienti, la metà dei quali ha contratto la malattia. Dall'indagine risulta che dei 50 pazienti a cui è stato somministrato il farmaco solo 20 non hanno contratto la malattia. Calcolare:

a) la probabilità che un paziente non abbia assunto il farmaco

b) la probabilità che un paziente a cui non è stato somministrato il farmaco abbia contratto la malattia

c) la probabilità che un paziente che non ha assunto il farmaco non abbia contratto la malattia

Sol.

Definiamo gli eventi

F="al paziente è stato somministrato il farmaco"

M="il paziente ha contratto la malattia"

I dati si rappresentano nella tabella seguente (ricostruendola con le opportune frequenze mancanti)

M|F	F	$\bar{F}$	Totale
M			40
$\bar{M}$	20		
Totale	50		80

M|F	F	$\bar{F}$	Totale
M	**30**	**10**	40
$\bar{M}$	20	**20**	**40**
Totale	50	**30**	80

a) probabilità che un paziente non abbia assunto il farmaco

$$P(\bar{F}) = \frac{30}{80}$$

b) probabilità che un paziente a cui non è stato somministrato il farmaco abbia contratto la malattia

$$P(M|\bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{10/80}{30/80} = \frac{10}{30} = 0.33$$

c) probabilità che un paziente che non ha assunto il farmaco non abbia contratto la malattia

$$P(\bar{M}|\bar{F}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{20/80}{30/80} = \frac{20}{30} = 0.66$$

Esercizio 3. Distribuzione di probabilità, funzione di ripartizione e momenti di una v.c.

Data la v.c. discreta X caratterizzata dalla funzione di probabilità:

$$p(x) = \frac{1}{35}(x + 5)$$

$x = 0,1,2,3,4$

A) calcolare la funzione di probabilità e di ripartizione di X e rappresentarla graficamente

B) determinare i momenti caratteristici di X (valore atteso, varianza, asimmetria)

Sol.

Per il valore x=0 la funzione di probabilità risulta:

$$P(0) = \frac{1}{35}(0 + 5) = 0.14$$

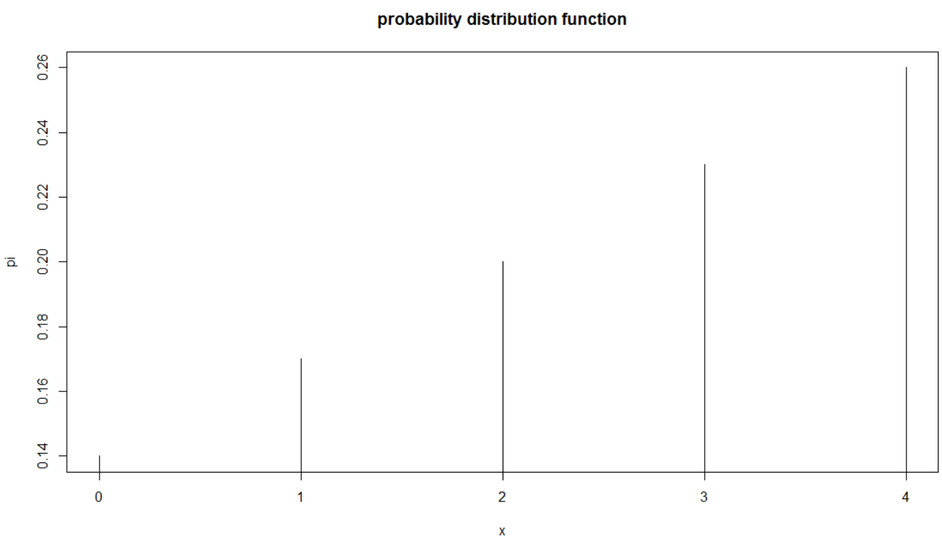
Per il valore x=1 la funzione di probabilità risulta:

$$P(1) = \frac{1}{35}(1 + 5) = 0.17$$

…e così via per gli altri valori di X.

La distribuzione di probabilità è quindi la seguente:

X	p_i
0	0.14
1	0.17
2	0.20
3	0.23
4	0.26



La funzione di ripartizione F(X) esprime la probabilità che X assuma un valore al massimo pari ad x, ossia:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

La funzione di ripartizione risulta:

$F(X) = 0\ per\ x < 0$

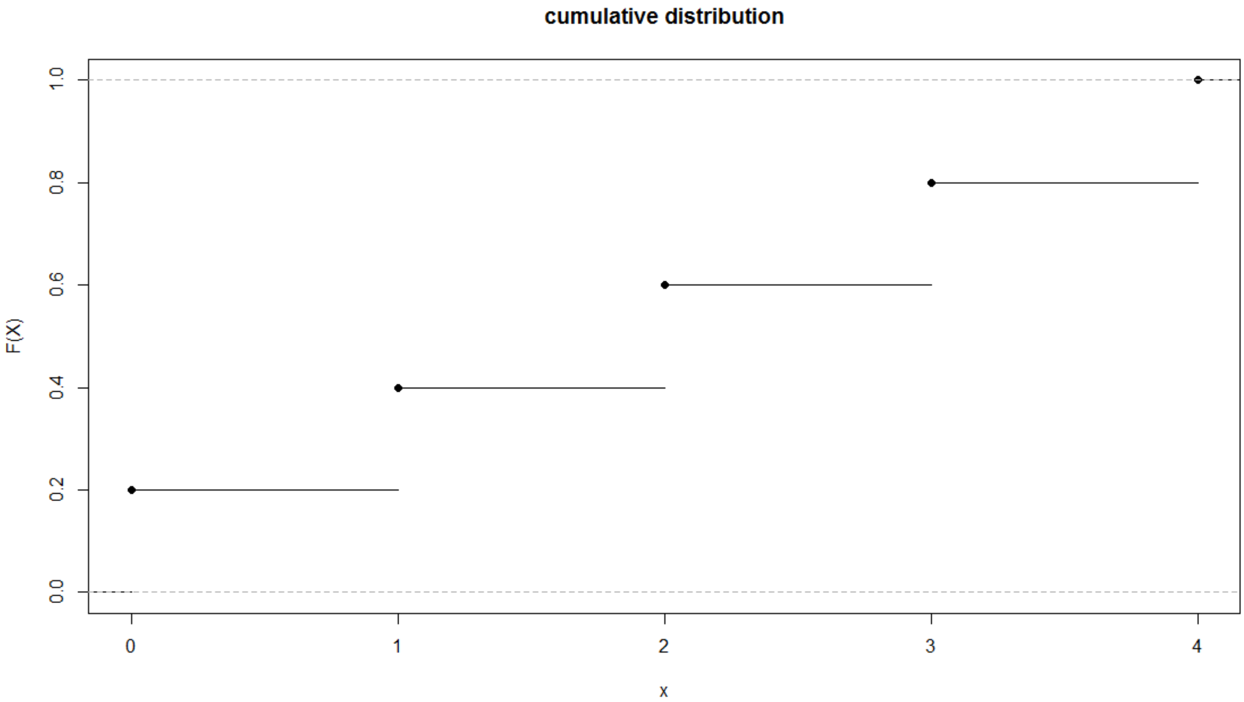
$F(X) = 0.14\ per\ 0 \leq x < 1$

$F(X) = 0.31\ per\ 1 \leq x < 2$

$F(X) = 0.51\ per\ 2 \leq x < 3$

$F(X) = 0.74\ \ per\ 3 \leq x < 4$

$F(X) = 1\ \ per\ x \geq 4$



il calcolo di E(X) e Var(X), rispettivamente momento primo e momento centrale di ordine 2:

x	p_i	xp_i	x^2p_i
0	0.14	0	0
1	0.17	0.17	0.17
2	0.20	0.40	0.80
3	0.23	0.69	2.06
4	0.26	1.03	4.11
Tot	1	2.29	7.14

Da cui si ricava:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = 2.29$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7.14 - 2.29^2 = 1.92$$

Momenti r-esimi standardizzati: per r=3 asimmetria

$$Asym(X) = E(\frac{X-\mu}{\sigma})^3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

Asimmetria:si riferisce alla forma di una distribuzione rispetto alla posizione centrale. Si dice perciò asimmetrica una distribuzione la cui forma non è speculare rispetto alla posizione centrale (presenza di code)

Per il calcolo di Asym(X)

x	p_i	$(x_i-\mu)^3 p_i$
0	0.14	-1.6813
1	0.17	-0.3649
2	0.20	-0.0049
3	0.23	0.0823
4	0.26	1.3000
Tot	1	-0.6688

$$\sigma^3 = 1.39^3 = 2.66$$

$$Asym(X) = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{-0.6688}{2.66} = -0.25$$

Esercizio 4. Costruzione di variabili casuali, momenti e calcolo della probabilità

Ad un certo tavolo di un casinò si gioca lanciando un dado. Il gioco consiste nel lanciare un dado regolare, i cui possibili esiti danno luogo alle seguenti vincite o perdite:

Esito della prova	Vincita o perdita
Uscita faccia UNO	Il giocatore paga 200 euro
Uscita faccia DUE	Il giocatore vince 200 euro
Uscita faccia TRE	Il giocatore paga 300 euro
Uscita faccia QUATTRO	Il giocatore vince 300 euro
Uscita faccia CINQUE	Il giocatore paga 100 euro
Uscita faccia SEI	Il giocatore vince 100 euro

Il signor B intende partecipare al gioco.

a) costruire la v.c. che descrive la vincita/perdita al gioco

b) calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale costruita al punto a)

c) calcolare la probabilità di vincere 300 euro effettuando due prove

Sol.

La prova consiste nel lancio di un dado, per cui lo spazio campionario è costituito dall'insieme dei numeri compresi tra 1 e 6. Indichiamo con E_i (i=1,2,…,6) l'evento "uscita della faccia i-esima del dado". I possibili risultati della prova, le probabilità e gli esiti del gioco sono:

E_i	uno	due	tre	quattro	cinque	sei
x_i	-200	+200	-300	+300	-100	+100
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La v.c. relativa ai risultati del gioco:

x_i	p_i
-300	1/6
-200	1/6
-100	1/6
+100	1/6
+200	1/6
+300	1/6

Per i calcoli

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
-300	1/6	-50	90000	15000
-200	1/6	-33.33	40000	6666.67
-100	1/6	-16.67	10000	1666.67
+100	1/6	+16.67	10000	1666.67
+200	1/6	+33.33	40000	6666.67
+300	1/6	+50	90000	15000
		0		46666.68

Valore atteso

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = 0$$

(si tratta di un gioco equo)

Varianza

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 46666.68 - 0^2 = 46666.68$$

Per calcolare la probabilità di vincere 300 euro dopo due prove bisogna considerare la probabilità dell'unione dei due eventi incompatibili relativi all'uscita della faccia "due" nel primo lancio e della faccia "sei" nel secondo lancio, oppure all'uscita della faccia "sei" nel primo lancio e della faccia "due" nel secondo lancio:

$$P(E_2 \cap E_6) \cup P(E_6 \cap E_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 0.055$$

Esercizio 5. Costruzione di variabili casuali, distribuzione di probabilità, momenti

Si consideri un gioco che consiste nel lanciare un dado regolare le cui facce sono contrassegnate con i numeri da 1 a 6. Il giocatore paga per giocare un prezzo di 40 euro e vince una somma pari a 10 euro moltiplicata per il numero ottenuto nella prova.

Si consideri la v.c. X che rappresenta il guadagno ottenuto dal giocatore al netto del prezzo pagato per giocare.

1) Costruire la distribuzione di probabilità della variabile X, e rappresentarla graficamente.

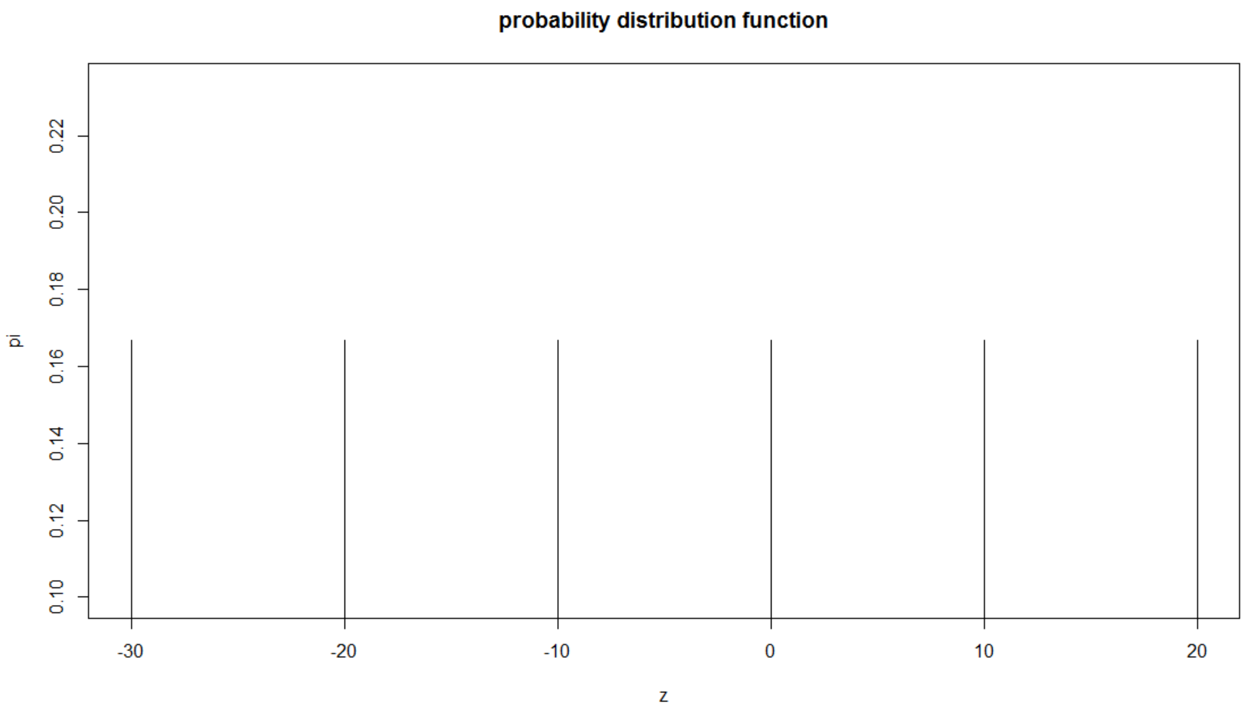
2) Calcolare il guadagno atteso e la varianza

3) Giochereste al gioco? E se il prezzo fosse 10 euro?

Sol.

Distribuzione di probabilità di X

x	p_i
-30	1/6
-20	1/6
-10	1/6
0	1/6
10	1/6
20	1/6



Guadagno atteso e varianza di X:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = -5$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 292$$

L'individuo razionale (avverso al rischio) non giocherà a questo gioco poiché il guadagno atteso è negativo.

Per un prezzo pari a 10 euro la distribuzione del guadagno al netto sarebbe la seguente:

x	p_i
0	1/6
10	1/6
20	1/6
30	1/6
40	1/6
50	1/6

Per cui il guadagno atteso è pari a:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = 25$$

E' quindi razionale scegliere di giocare.