CORSO DI STATISTICA (parte 1) - ESERCITAZIONE 7

Dott.ssa Antonella Costanzo

a.costanzo@unicas.it

<u>Incompatibilità ed indipendenza stocastica. Probabilità condizionate, legge della probabilità totale, Teorema di Bayes.</u>

Postulati del calcolo della probabilità (Kolmogorov):

Dato un evento $A_i \in \Omega$, dove $\boldsymbol{\Omega}$ è lo spazio degli eventi:

1. la probabilità è sempre un numero non negativo, $\boldsymbol{P(A) \geq 0,}\ \forall A_i \in \Omega$

2. la probabilità di un evento certo è pari a uno, $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$

3. Dati due eventi A e B $\in \Omega$, posto $A \cap B = \varnothing$, allora: $P(AUB) = P(A) + P(B)$

Eventi incompatibili: un esempio

Consideriamo due dadi identici, aventi le facce contrassegnate coi numeri da uno a sei. Scegliamo tre eventi possibili, conseguenti al lancio di entrambi:

A = "la somma dei punti sia pari"

B = "la somma dei punti sia dispari"

C = "la somma dei punti sia divisibile per tre"

Determinare $P(A \cap B)$

È evidente che se la somma dei punti è pari essa non potrà essere contemporaneamente dispari:i due eventi A e B sono quindi incompatibili. $P(A \cap B) = 0$

Invece, esistono numeri la cui somma è pari (o dispari) e divisibile per tre: gli eventi A e C, dunque, così come gli eventi B e C, si dicono compatibili. Dunque, due eventi aleatori, appartenenti ad una medesima prova, si dicono incompatibili quando il realizzarsi dell'uno esclude il realizzarsi dell'altro; in caso contrario, gli eventi si diranno compatibili.

Eventi compatibili, probabilità condizionate e indipendenza stocastica

Dati due eventi A e B $\in \Omega$, la probabilità che si verifichi l'evento B dato che si è verificato A è data da:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ciò implica che l'intersezione tra due eventi compatibili si può ricavare come:

$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$

Se A e B sono eventi indipendenti:

$P(B|A) = P(B)$ poiché $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Probabilità dell' unione di due eventi compatibili:

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dove:

- $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ se A e B sono eventi <u>indipendenti</u>
- $P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$ se A e B sono <u>dipendenti</u>

Nota: La *dipendenza* tra eventi esprime una relazione tra le <u>probabilità</u> degli eventi. Se gli eventi sono indipendenti la probabilità che si verifichi uno non modifica la probabilità che si verifichi l'altro. L'*incompatibilità* è una relazione tra eventi: il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro. Se due eventi sono compatibili non è detto che siano necessariamente dipendenti.

Esercizio 1.

Uno studente universitario ha programmato di sostenere nella sessione estiva gli esami X e Y. Sia A l'evento "supera l'esame X" e sia B l'evento "supera l'esame Y", con P(A)=0.7, P(B)=0.5, P(A∩B)=0.4. Calcolare la probabilità che superi almeno uno dei due esami.

Svolgimento:

A e B sono eventi compatibili. La probabilità che lo studente superi *almeno* uno dei due esami equivale alla seguente:

P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)=0.7+0.5-0.4=0.8. La probabilità che lo studente superi almeno uno dei due esami è dell'80%.

Esercizio 2.

Una fabbrica produce RAM che possono avere due tipi di difetti, il difetto A e il difetto B. Il responsabile per la qualità della fabbrica afferma che, dall'esperienza passata, la probabilità che una RAM abbia almeno uno dei due difetti è pari a 0.3; la probabilità che abbia il difetto A è pari a 0.3; la probabilità che abbia contemporaneamente i due difetti è pari a 0.2. Calcolare la probabilità che una RAM abbia:

a. Il difetto B
b. Il difetto A dato che si è riscontrato che ha il difetto B

Svolgimento:

P(AUB)=0.3

P(A)=0.3

P(A∩B)=0.2

a) P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B) possiamo ricavare

P(B)= P(AUB)-P(A)+P(A∩B)=0.3-0.3+0.2=0.2

b) P(A|B)=$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.2} = 1$

Esercizio 3.

Un collettivo di 200 studenti è stato classificato secondo il voto riportato ad un dato esame e a seconda che l'esame in oggetto sia stato il primo ad essere sostenuto o meno.

X=Voto | Y=Primo esame	SI	NO	Totale
Voto ≤ 24	40	15	**55**
Voto ≥ 25	45	100	**145**
Totale	**85**	**115**	**200**

Si estrae a caso uno studente.

Si considerino gli eventi A={voto ≤24} e B={è il primo esame sostenuto}

1) Calcolare la probabilità che lo studente estratto abbia ottenuto un voto minore/uguale di 24

$$P(A) = \frac{55}{200} = 0.275$$

2) Calcolare la probabilità che l'esame sostenuto sia stato il primo

$$P(B) = \frac{85}{200} = 0.425$$

3) Calcolare la probabilità che abbia ottenuto un voto minore/uguale di 24 oppure che l'esame sostenuto sia stato il primo.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{55}{200} + \frac{85}{200} - \frac{40}{200} = \frac{100}{200} = 0.5$$

4) Calcolare la probabilità che l'esame sostenuto sia il primo dato che lo studente abbia conseguito un voto minore/uguale a 24.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{40}{55} = 0.727$$

5) verificare se gli eventi A e B sono indipendenti.

Dobbiamo quindi verificare che valga una delle seguenti condizioni:

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Nel nostro caso, si può notare che $P(A \cap B) = \frac{40}{200} = 0.2 \neq P(A)P(B) = 0.275 * 0.425 = 0.117$

Gli eventi A e B sono quindi dipendenti.

Esercizio 4.

Su 100 visitatori di un negozio, 60 hanno dichiarato di essere stati attratti da un annuncio pubblicitario. In totale 40 visitatori hanno fatto acquisti e tra questi 30 avevano visto l'annuncio pubblicitario.

a) Qual è la probabilità di fare acquisti per coloro che hanno visto l'annuncio?

b) e per coloro che non l'hanno visto?

Svolgimento:

Indichiamo con A= il visitatore effettua un acquisto e con P= il visitatore ha visto l'annuncio pubblicitario.

$P(A) = \frac{40}{100} = 0.4$ probabilità di fare un acquisto

$P(P) = \frac{60}{100} = 0.6$ probabilità di aver visto l'annuncio quindi $P(\bar{P}) = 0.4$

$P(A \cap P) = \frac{30}{100} = 0.3$ probabilità di fare acquisti e di aver visto l'annuncio

Vogliamo determinare: $P(A|P)$, ovvero la probabilità che il visitatore effettui un acquisto sapendo che ha visto l'annuncio pubblicitario:

a) $P(A|P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$

b) la probabilità di fare acquisti per coloro che non hanno visto l'annuncio è data dalla seguente:

$$P(A|\bar{P}) = \frac{P(A \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

Sfruttando la **Legge delle probabilità totali:** $\boldsymbol{P(A) = P(A \cap P) + P(A \cap \bar{P})}$**.**

Di conseguenza $P(A \cap \bar{P}) = P(A) - P(A \cap P) = 0.4 - 0.3 = 0.1$

Nota: utilizzando la definizione di probabilità condizionata possiamo estendere la legge delle probabilità totali: $P(A \cap P) = P(A|P) * P(P)$ e $P(A \cap \bar{P}) = P(A|\bar{P}) * P(\bar{P})$ per cui

$P(A) = P(A|P) * P(P) + P(A|\bar{P}) * P(\bar{P})$

Esercizio 5. Teorema di Bayes (generalizzato)

Un economista sostiene che durante un periodo di forte crescita economica, il valore del dollaro USA si apprezza con probabilità 0.70; nei periodi con una moderata crescita il dollaro tende ad apprezzarsi con probabilità 0.4; infine, nei periodi di scarsa crescita economica la probabilità che la moneta si apprezzi è solo di 0.20.

Inoltre, da studi effettuati si sa che la probabilità (in ogni periodo) di registrare una forte crescita dell'economia USA è 0.30; la probabilità di una crescita moderata è 0.50 e la probabilità di avere periodi di scarsa crescita economica degli USA è invece 0.20.

Supponiamo a questo punto di osservare un apprezzamento del dollaro. Qual è la probabilità che l'economia USA stia vivendo un periodo di forte crescita economica?

Svolgimento:

In questo caso la partizione dello spazio campionario è formata da 3 eventi incompatibili e necessari:

1. elevata crescita economica (E)
2. moderata crescita economica (M)
3. bassa crescita economica (B)

Le probabilità *a priori* per ciascuno di questi eventi sono rispettivamente:

1. P(E)=0.30
2. P(M)=0.50
3. P(B)=0.20

Indichiamo con A l'evento "apprezzamento del dollaro". Le probabilità condizionate di A agli eventi E, M e B sono rispettivamente:

1. P(A|E)=0.70
2. P(A|M)=0.40
3. P(A|B)=0.20

Vogliamo determinare:

$$P(E|A) = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A|E)P(E) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B)} =$$

$$= \frac{0.70(0.30)}{(0.70)(0.30) + (0.40)(0.50) + (0.20)(0.20)} = 0.467$$

Esercizio 6. Indipendenza stocastica

Un'urna contiene 7 palline gialle e 3 rosse.

a) calcolare la probabilità che, estraendo dall'urna due palline senza reintroduzione, alla seconda estrazione si verifichi pallina gialla.

Svolgimento:

L'estrazione avviene senza reimmissione, quindi la pallina estratta non viene rimessa nell'urna. Gli eventi non sono indipendenti.

$$P(G) = \frac{7}{10}$$

$$P(R) = \frac{3}{10}$$

$$P(G_2) = P(G_1) * P(G_2|G_1) + P(R_1) * P(G_2|R_1) = \frac{7}{10} * \frac{6}{9} + \frac{3}{10} * \frac{7}{9} = \frac{7}{10} = 0.7$$

b) Calcolare la probabilità che, estraendo dall'urna due palline senza reimmissione, si verifichi pallina rossa alla prima estrazione e gialla alla seconda

Svolgimento:

$$P(R_1 \cap G_2) = P(R_1) * P(G_2|R_1) = \frac{3}{10} * \frac{7}{9} = 0.23$$

c) Supponiamo siano state estratte ripetutamente le palline dall'urna rimettendo ogni pallina nell'urna dopo ciascuna estrazione. Calcolare la probabilità di ottenere una pallina gialla nella seconda estrazione.

Svolgimento:

Siccome le palline ad ogni estrazione vengono reintrodotte nell'urna, le estrazioni sono indipendenti: la composizione dell'urna non cambia da un'estrazione all'altra e quindi la probabilità di ottenere una pallina gialla ad una certa estrazione è sempre la stessa ad ogni estrazione.

$$P(G_2) = P(G_1) * P(G_2) = \frac{7}{10} * \frac{7}{10} = 0.49$$

Esercizio 8.

Il 60% degli studenti che frequentano il corso di statistica non possiede né una macchina né un motorino, il 20% possiede una macchina e il 30% un motorino. Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione di uno studente a caso dall'elenco degli studenti. Calcolare le seguenti probabilità:

a) P(sia proprietario di una macchina)

b) P(sia proprietario di un motorino)

c) P(non sia proprietario né di una macchina né di un motorino)

d) P(sia proprietario di una macchina o di un motorino)

e) P(sia proprietario di una macchina e di un motorino)

Svolgimento:

Indichiamo con P(A)=0.2 la probabilità che possieda una macchina e con P(M)=0.3 la probabilità che possieda un motorino. La probabilità che non possieda né una macchina né un motorino è data da $P(\bar{A} \cap \bar{M}) \ = 0.6$

a) P(A)=0.2

b) P(M)=0.3

c) $P(\overline{A \cup M}) = 0.6$

d) $P(A \cup M) = 1 - P(\overline{A \cup M}) = 1 - 0.6 = 0.4$ poiché

$P(\overline{A \cup M}) = P(\bar{A} \cap \bar{M})$ (Legge di De Morgan) per cui è possibile ricavare $P(A \cup M)$ come:

$$P(A \cup M) = 1 - P\left(\overline{\bar{A} \cap \bar{M}}\right) = 1 - 0.6 = 0.4$$

e) sapendo che $P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$ allora $P(A \cap M) = P(A) + P(M) - P(A \cup M)$

$P(A \cap M) = 0.2 + 0..3 - 0.4 = 0.1$

Quindi:

$$P(A \cap M) = P(A) + P(M) - P(A \cup M) = 0.2 + 0..3 - 0.4 = 0.1$$