# CORSO DI STATISTICA (parte 1) - ESERCITAZIONE 6

*Dott.ssa Antonella Costanzo*

*a.costanzo@unicas.it*

**Riepilogo:**

**Postulati del calcolo della probabilità (Kolmogorov):**

Dato un evento $A_i \in \Omega$, dove $\boldsymbol{\Omega}$ è lo spazio degli eventi:

1. la probabilità è sempre un numero non negativo, $P(A) \geq 0, \forall A_i \in \Omega$

2. la probabilità di un evento certo è pari a uno, $P(\Omega) = 1$

3. Dati due eventi A e B $\in \Omega$, posto $A \cap B = \varnothing$, allora: $P(AUB) = P(A) + P(B)$

**Eventi compatibili, probabilità condizionate e indipendenza stocastica**

Dati due eventi A e B $\in \Omega$, la probabilità che si verifichi l'evento B dato che si è verificato A è data da:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ciò implica che l'intersezione tra due eventi compatibili si può ricavare come:

$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$

Se A e B sono eventi indipendenti:

$P(B|A) = P(B)$ poiché $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

**Probabilità dell' unione di due eventi compatibili:**

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dove:

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ se A e B sono eventi indipendenti

$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$ se A e B sono dipendenti

**Partizione dello spazio campionario**

Dati due eventi A e B essi definiscono una partizione dello spazio campionario se insieme sono incompatibili $A \cap B = \emptyset$ e necessari $A \cup B = \Omega$

**Esercizio 1. Partizioni di uno spazio campionario**

Relativamente a tre lanci di una moneta:

a) Qual è il più piccolo spazio degli eventi elementari che descrive l'evento "numero di teste"?
b) Qual è il più piccolo spazio degli eventi elementari che descrive l'evento "massimo numero di teste consecutive"?
c) Qual è il più piccolo spazio degli eventi elementari che descrive entrambi gli eventi di a) e b)?

*Sol.*

a)Indichiamo i risultati della sequenza di tre lanci con i simboli T e C. La partizione che descrive l'evento numero di teste è costituita dai seguenti eventi elementari:
(TTT) (TTC, TCT, CTT) (TCC, CTC, CCT) (CCC)

b)La partizione che descrive l'evento "numero massimo di teste consecutive" è:
(TTT) (TTC, CTT) (TCT, TCC, CTC, CCT), (CCC)

c)La minima partizione che descrive entrambi gli eventi composti di cui ai punti a) e b) è:
(TTT), (TTC, CTT) (TCT), (TCC, CTC, CCT), (CCC)

**Esercizio 2. Partizione spazio campionario, probabilità condizionate**

Mario (M), Giuseppe (G), Antonio (A), Pietro (P) e Raffaele (R) sono i dipendenti dell'agenzia di viaggio EASY TRAVEL. In seguito ai profitti ottenuti dall'agenzia lo scorso anno, vengono assegnati dalla stessa due viaggi premio. I 5 dipendenti decidono di estrarre casualmente i due che tra essi usufruiranno del premio.

a) Descrivere lo spazio campionario elencando tutti i possibili esiti
b) Calcolare la probabilità che Mario e Giuseppe siano i due sorteggiati
c) Calcolare la probabilità che Mario sia uno dei due sorteggiati

*Sol.*

a) Lo spazio campionario è dato dall'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento "estrazione dei vincitori"

$\Omega=\{M, G, A, P, R\}$

Le combinazioni possibili sono 16:

(MG, MA, MP, MR)

(GM, GA, GP, GR)

(AM, AG, AP, AR)

(RM, RG, RA, RP)

b) Probabilità che Mario e Giuseppe siano i due sorteggiati

$$P(M \cap G) \cup P(G \cap M) = P(M)P(G|M) \cup P(G)P(M|G) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

c) Probabilità che Mario sia uno dei due sorteggiati

$$P[\underbrace{(M \cap G) \cup (G \cap M)}_{\mathrm{I}} \cup \underbrace{(M \cap A) \cup (A \cap M)}_{\mathrm{II}} \cup \underbrace{(M \cap P) \cup (P \cap M)}_{\mathrm{III}} \cup \underbrace{(M \cap R) \cup (R \cap M)}_{\mathrm{IV}}] =$$

$$= \left[\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right] + \left[\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right] + \left[\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right] + \left[\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right] = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0.4$$

Nota, come già visto nel punto b):

$$P(M \cap G) = P(M)P(G|M) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$
$$P(G \cap M) = P(G)P(M|G) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

E ciò è vero per le altre rimanenti 3 combinazioni (II, III e IV). Dunque, in via più breve :

$$4[P(M \cap G) \cup P(G \cap M)] = 4\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right] = 4\left(\frac{2}{20}\right) = 4\left(\frac{1}{10}\right) = 0.4$$

**Esercizio 3. Slot machine**

Il funzionamento di una slot machine è regolata da una leva che fa girare tre ruote su ognuna delle quali ci sono 20 simboli, tutti ugualmente probabili. Sulle due ruote laterali, tra i simboli presenti, c'è una campana e sulla ruota centrale ci sono 10 campane. Il giocatore vince il jackpot solo se ottiene un tris di campane.

a) calcolare la probabilità di vincere il jackpot
b) calcolare la probabilità di non vincere il jackpot
c) calcolare la probabilità di ottenere una sola campana sulle tre ruote disponibili
d) calcolare la probabilità di ottenere due campane sulle tre ruote disponibili

Sol.

a) Indichiamo con $C_i$ l'evento "esce il simbolo campana sull' i-esima ruota", i=1,…,3, la probabilità di vincere il jackpot è data dalla seguente:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = \frac{1}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{1}{20} = 0.0012$$

b) Possiamo esprimere la probabilità di non vincere il jackpot come complemento a uno della probabilità di vincita del jackpot calcolata in precedenza:

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}) = 1 - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 1 - 0.0012 = 0.9988$$

c) Probabilità di ottenere una sola campana sulle 3 ruote disponibili

$$P(C_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) \cup P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) \cup P(\bar{C}_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3) =$$

$$= \left(\frac{1}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{19}{20}\right) + \left(\frac{19}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{19}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{19}{20}\right) = 0.07125$$

d) Per calcolare la probabilità di ottenere due campane sulle tre ruote disponibili ricordiamo che $C_i$= esce una campana sulla i-esima ruota mentre indichiamo con $\bar{C_i}$ l'evento "escono tutti gli altri simboli tranne la campana sull'-esima ruota". Quindi avremo:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap \bar{C}_3) \cup P(\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup P(C_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) =$$

$$\left(\frac{1}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{19}{20}\right) + \left(\frac{19}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{1}{20}\right) = 0.0487$$

**Esercizio 4. Probabilità condizionata ed eventi indipendenti, legge delle probabilità totali**

In una catena di montaggio si eseguono due operazioni in sequenza. L'esito della prima non dipende da quello della seconda. Le probabilità che le operazioni riescano senza difetti sono rispettivamente 0.9 e 0.8. Calcolare la probabilità che:

a) nessuna delle due operazioni riesca;

b) almeno una delle due operazioni non riesca;

c) riesca esattamente una delle due.

*Sol.*

a) Indichiamo con $R_i$ =l'operazione i-esima riesce e con $\bar{R}_i$ = l'operazione i-esima non riesce

Dobbiamo calcolare $P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2)$ e siccome gli eventi sono indipendenti allora:

$$P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = P(\bar{R}_1) \times P(\bar{R}_2)$$

$P(\bar{R}_1) = 1 - P(R_1) = 1 - 0.9 = 0.1$

$P(\bar{R}_2) = 1 - P(R_2) = 1 - 0.8 = 0.2$

$P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$

b) Dobbiamo calcolare la probabilità che almeno una delle due non riesca, quindi:

$P(\bar{R}_1 \cup \bar{R}_2) = P(\bar{R}_1) + P(\bar{R}_2) - P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = 0.1 + 0.2 - 0.02 = 0.28$

c) la probabilità che ne riesce una sola, o l'una o l'altra è data da:

$P(R_1 \cup R_2) - P(R_1 \cap R_2) =$

Dove per il teorema delle probabilità totali

$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) = 0.9 + 0.8 - (0.9 \times 0.8) = 0.98$

Per cui la probabilità cercata è data da:

$P(R_1 \cup R_2) - P(R_1 \cap R_2) = 0.98 - (0.9 \times 0.8) = 0.26$

*Nota utile*: il punto c) può essere anche risolto ricorrendo alle leggi di De Morgan.

Soluzione alternativa (punto c):

$\overline{R_1 \cup R_2} = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2$ (II legge di De Morgan) e negando si ottiene

$\overline{\overline{R_1 \cup R_2}} = \overline{\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2}$

Che può essere scritto come:

$$R_1 \cup R_2 = \overline{\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2}$$

Allora:

$$P(R_1 \cup R_2) = 1 - P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = 1 - 0.02 = 0.98$$

E quindi: $P(R_1 \cup R_2) - P(R_1 \cap R_2) = 0.98 - (0.9 \times 0.8) = 0.26$

**Esercizio 5. Probabilità e distribuzioni doppie**

La seguente tabella riporta la distribuzione di studenti che si sono laureati a Cassino nel precedente anno accademico differenziata per voto di laurea (in classi) e per tipo di laurea.

| **Laurea \| Voto di laurea** | **<100** | **[100,105)** | **[105,110)** | **110 e lode** | **Totale** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Economia Aziendale** | 70 | 60 | 40 | 30 | 200 |
| **Economia e Commercio** | 50 | 10 | 20 | 20 | 100 |
| **Totale** | 120 | 70 | 60 | 50 | 300 |

a) Estraendo a caso uno dei 300 studenti qual è la probabilità che abbia conseguito la laurea in Economia e Commercio?

Indichiamo con EC ="lo studente ha conseguito una laurea in economia e commercio"

$$P(EC) = \frac{100}{300}$$

b) Estraendo a caso uno dei 300 studenti, qual è la probabilità che abbia conseguito la laurea con il massimo dei voti?

$$P(110\ e\ lode) = \frac{50}{300}$$

c) Estraendo a caso uno degli studenti qual è la probabilità che abbia conseguito la laurea in Economia e commercio con il massimo dei voti?

$$P(EC \cap 110\ e\ lode) = P(EC) \times P(110\ e\ lode|EC) = \frac{100}{300} \times \frac{20}{100} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

d) Estraendo a caso uno degli studenti laureati in Economia e Commercio, qual è la probabilità che abbia conseguito la laurea con il massimo dei voti?

$$P(110\ e\ lode|EC) = \frac{P(110\ e\ lode \cap EC)}{P(EC)} = \frac{1/15}{100/300} = \frac{1/15}{1/3} = \frac{1}{5}$$

oppure direttamente, dalla tabella: $\frac{20}{100}$