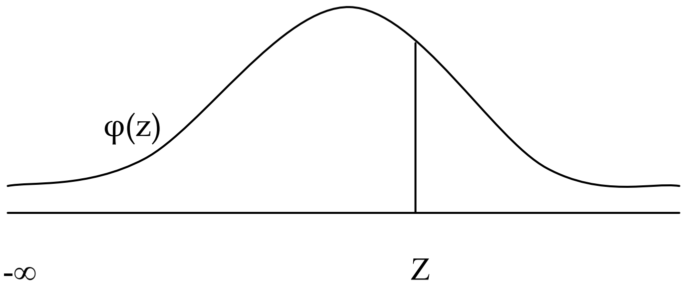
Esercitazione 9 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

16 Marzo 2011

ESERCIZI SULLA V.C. NORMALE

$\varphi(z) = P(Z \leq z)$ con $Z \sim N(0,1)$

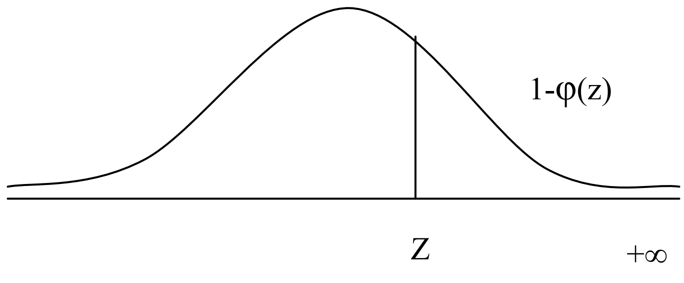


Calcolare:

$P(Z \leq 0{,}99) = \varphi(0{,}99) = 0{,}8389$

$P(Z \leq 1{,}36) = \varphi(1{,}36) = 0{,}9131$

$\varphi(z) = P(Z \leq z)$ con $Z \sim N(0,1)$

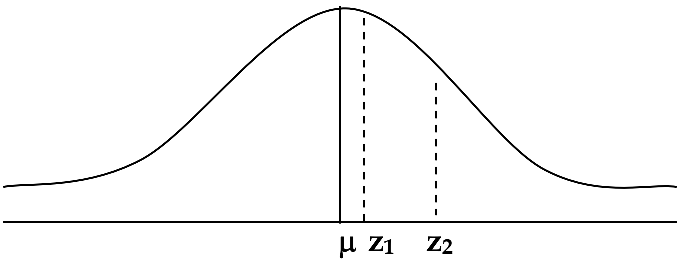


Calcolare:

$P(Z \leq 0{,}99) = \varphi(0{,}99) = 0{,}8389$

$P(Z \leq 1{,}36) = \varphi(1{,}36) = 0{,}9131$

IN UN QUALSIASI INTERVALLO



Calcolare

$P(0{,}5 < Z < 1)$ $\varphi(1) = 0{,}8413$
$\varphi(0{,}5) = 0{,}6914$

$\varphi(1) - \varphi(0{,}5)$

$P(0{,}6914 < Z < 0{,}8413) = P(0{,}8413 - 0{,}6914) = 0{,}1499 \cong$ **15%**

Calcolare:

$P(0{,}63 < Z < 1{,}77)$ $\varphi(1{,}77) = 0{,}9616$
$\varphi(0{,}63) = 0{,}7357$

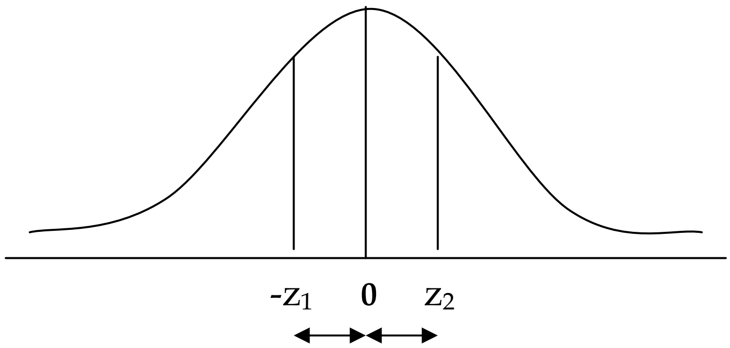
$\varphi(1{,}77) - \varphi(0{,}63)$
$P(0{,}7357 < Z < 0{,}9616) = P(0{,}9616 - 0{,}7357 = 0{,}2259 \cong$ **22%**

L'INTERVALLO E' A CAVALLO DI μ

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$

$P(z_1 < Z < z_2) = P(z_1 < Z < 0) + P(0 < Z < z_2)$

$= \varphi(-z_1) - \varphi(0) + \varphi(z_2) - \varphi(0)$
$= \varphi(-z_1) + \varphi(z_2) - 1$



Calcolare:

$P(-1,1 < Z < 0,35)$ $\varphi(1,1) = 0,8643$
$\varphi(0,35) = 0,6368$
$\varphi(0) = 0,5$

= $\varphi(0,35) - \varphi(0) + \varphi(1,1) - \varphi(0)$

$P(-1,1 < Z < 0,35) = 0,6368+0,8643-1 =$ **0,5**

Calcolare:

$P(-1,74 < Z < 0,11)$ $\varphi(0,11) = 0,5438$
$\varphi(1,74) = 0,9590$
$\varphi(0) = 0,5$

= $\varphi(0,11) - \varphi(0) + \varphi(1,74) - \varphi(0)$

$P(-1,74 < Z < 0,11) = 0,9590+0,5438-1 =$ **0,5028**

INTERVALLI NEGATIVI

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$ con z_1 e z_2 negativi

Ribalto l'area $[-z_1, -z_2]$ dall'altra parte dell'asse per la SIMMETRIA della curva

$$P(z_1 < z < z_2) = P(-z_2 < z < -z_1)$$

Calcolare:

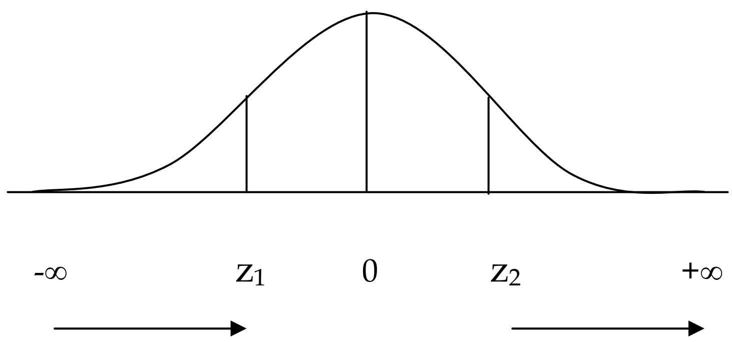
$P(-0{,}93 < Z < -0{,}8) \quad = P(0{,}8 < Z < 0{,}93)$

$\varphi(0{,}8) = 0{,}7881$
$\varphi(0{,}93) = 0{,}8238$

$P(0{,}8 < Z < 0{,}93) = \varphi(0{,}93) - \varphi(0{,}8) = (0{,}8238 - 0{,}7881) = 0{,}0357$

INTERVALLI SULLE CODE

$(-\infty$ ad $z_1)$ indica la CODA SINISTRA: $1 - \varphi(z_1)$
$(z_2$ ad $+\infty)$ indica la CODA DESTRA: $1 - \varphi(z_2)$



Calcolare

$P(Z>1{,}3) \qquad \varphi(1{,}3) = 0{,}9032$

$P(Z>1{,}3) = 1 - 0{,}9032 =$ **$0{,}0968 \cong 10\%$**

Calcolare

$P(Z<2{,}325) \qquad \varphi(2{,}325)$ = punto medio tra $\varphi(2{,}32)$ e $\varphi(2{,}33)$

$\varphi(2{,}32) = 0{,}9898$
$\varphi(2{,}33) = 0{,}9901$

$$\varphi(2{,}325) = \frac{0{,}9898 + 0{,}9901}{2} = 0{,}9899$$

$P(Z<2{,}325) = 0{,}9899 \cong$ **99%**

X~N(2;9) Calcolare P(0,412<X<3,12)

$P(0{,}412<X<3{,}12) = P\left(\frac{0{,}412-2}{3} < Z < \frac{3{,}12-2}{3}\right) = P(-0{,}53 < Z < 0{,}38)$ abbiamo un estremo negativo e uno positivo

$= \varphi(0{,}53) + \varphi(0{,}38) - 1 = P(0{,}7019) + P(0{,}6480) - 1 = \mathbf{0{,}35}$

X~N(0;4) Calcolare P(X>4,66)

$P(X>4{,}66) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-0}{2}\right) =$

$P(Z>2{,}33) = F(2{,}33) = 0{,}9901$

$P(Z>2{,}33) = 1-0{,}9901 = \mathbf{0{,}01 \cong 1\%}$

Esercizio n 1

Il diametro in millimetri dei bulloni prodotti da un'azienda ha una distribuzione normale con media 12 e scarto quadratico medio 0,15. Si vuole calcolare che il diametro sia compreso tra 11,8 e 12,1 millimetri. Sia X la variabile casuale che descrive il diametro dei bulloni:

$$X \sim N(12;\ 0{,}15^2)$$

Soluzione

La probabilità che X assuma valori nell'intervallo (11,8; 12,1) è data da:

$P(11{,}8 \le Z \le 12{,}1) =$

$$P\left(\frac{11{,}8-12{,}0}{0{,}15} \le Z \le \frac{12{,}1-12{,}0}{0{,}15}\right) = P(-1{,}33 \le z \le 0{,}67) = \phi(0{,}67)-\phi(-1{,}33) = \phi(0{,}67)-\left[1-\phi(1{,}33)\right] =$$
$$= 0{,}7486-(1-0{,}9082) = 0{,}6568$$

Oppure $\phi(0{,}67)-\phi(0)+\phi(1{,}33)-\phi(0) = (0{,}7486-0{,}5)+(0{,}9082-0{,}5) = 0{,}2486+0{,}4082 = 0{,}6568$

Oppure $\phi(0{,}67)+\phi(1{,}33)-1 = 0{,}7486+0{,}9082-1 = 0{,}6568$

Esercizio n 2

Il percorso in km che un'utilitaria compie con un litro di carburante ha una distribuzione Normale con media 25 e scarto quadratico medio 3. Determinare la probabilità che:

a) percorra più di 27 km;
b) percorra meno di 21 km;
c) il percorso sia compreso fra 21 e 27 km.

Soluzione

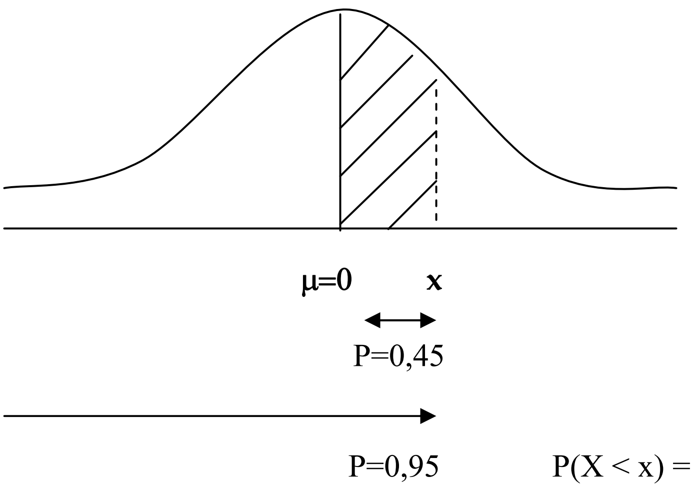
a) $P(X \geq 27) = P\left(Z \geq \frac{27-25}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}67) = 1 - \phi(0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(X \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21-25}{3}\right) = P(Z \geq -1{,}33) = 1 - \phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

$c) P(21 \leq X \leq 27) = P\left(\frac{21-25}{3} \leq Z \leq \frac{27-25}{3}\right) = P(-1{,}33 \leq Z \geq 0{,}67) = \phi(1{,}33) + \phi(0{,}67) - 1 = 0{,}7486$
$+ 0{,}9082 - 1 = 0{,}6568$

Esercizio n. 3

X~N(0;4). Trovare il valore di della *x* tale che P(0<X<x)=0,45



P(X < x) = 0,95

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 95% della Probabilità.

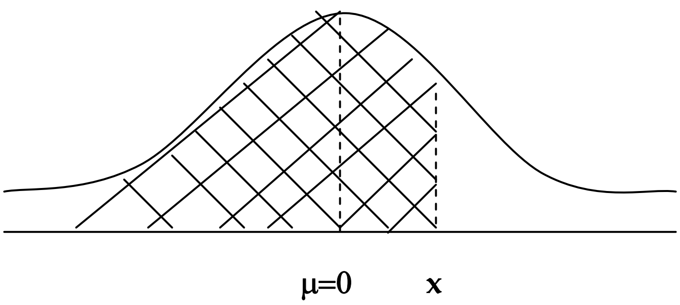
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$P(Z < z) = 0{,}95 \quad z = 01{,}645 = (1{,}64 + 1{,}65/2)$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}645 \rightarrow \frac{x-0}{\sqrt{4}} = 1{,}645 \rightarrow x = 2 * 1{,}645 = 3{,}29$

Esercizio n. 4

X~N(2;1). Trovare il valore di della *x* tale che $P(X<x)=0{,}90$



P=0,90 $P(X < x) = 0{,}90$

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 90% della Probabilità.

La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

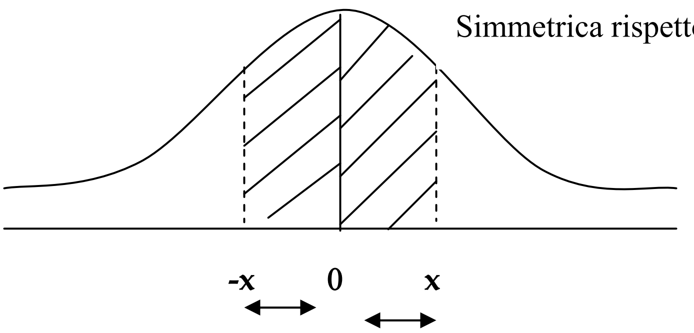
$P(Z < z) = 0{,}90 \quad z = 1{,}285 = (1{,}28 + 1{,}29 / 2)$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}285 \rightarrow \frac{x-2}{1} = 1{,}285 \rightarrow x = 2 + 1{,}285 = 3{,}285$

Esercizio n. 5

X~N(0;1). Trovare il valore di della *x* tale che $P(-x<X<x)=0{,}5$

Simmetrica rispetto lo 0



P=0,25 P=0,25

La probabilità cumulata fino al valore x = $P(X < x) = 0{,}75$

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 95% della Probabilità.

La nostra X~N ed è standardizzata, per cui:

$P(Z < z) = 0{,}75 \quad z = 0{,}675 = (0{,}67 + 0{,}68 / 2)$

z = 0,675 $\longrightarrow$ P(0,75) è il 3°Quartile: separa la probabilità in due parti: il 75% a sinistra e il 25% a destra del valore di *x*. Il 1° Quartile è pari a 0,325.