Esercitazione 10 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

12 Marzo 2009

ESERCIZIO 1

Nell'anno 2002 è stato osservato un campione di 300 fondi comuni di investimento della categoria azionaria europea, calcolando per essi i rendimenti e differenziandoli per la modalità di acquisto. I risultati di tale osservazione sono riportati nella seguente tabella:

		MODALITA' DI ACQUISTO		
		Banca (B)	*Promotore (P)*	
RENDIMENTO OTTENUTO	*Negativo (RN)*	62	48	*110*
	Positivo (RP)	108	82	*190*
		170	*130*	*300*

Calcolare la probabilità che un acquirente scelto a caso:

1) abbia acquistato un fondo presso una banca
2) abbia ottenuto un rendimento positivo
3) abbia acquistato un fondo da un promotore ottenendo un rendimento negativo
4) dal momento che ha acquistato un fondo presso una banca abbia ottenuto un rendimento positivo
5) dal momento che ha ottenuto un rendimento negativo abbia acquistato il fondo da un promotore
6) E' lecito ritenere che vi sia indipendenza tra la modalità di acquisto e il rendimento ottenuto?

SVOLGIMENTO

Per rispondere ai primi tre quesiti possiamo calcolare la tabella delle frequenze relative:

		MODALITA' DI ACQUISTO		
		Banca (B)	*Promotore (P)*	
RENDIMENTO OTTENUTO	*Negativo (RN)*	0.21	0.16	*0.37*
	Positivo (RP)	0.36	0.27	*0.63*
		0.57	*0.43*	*1*

1) $P(B) = 0.57$

2) $P(RP) = 0.63$

3) $P(RN \cap P) = 0.16$

4) $P(RP \mid B) = \dfrac{P(RP \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.36}{0.57}$

5) $P(P \mid RN) = \dfrac{P(P \cap RN)}{P(RN)} = \dfrac{0.16}{0.37}$

Esercizio n. 2

Estraendo due carte da un mazzo di carte napoletane con la reimmissione della carta nel mazzo dopo ciascuna prova (estrazione con ripetizione, gli eventi *sono indipendenti* in quanto, di prova in prova, il mazzo resta immutato), calcolare la probabilità che si presentino, nell'ordine,

1. Asso (*A*) e figura (*F*): $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F)$

2. Una carta di coppe (C) e una carta di denari (D): $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$

3. Un asso, una figura, un cinque ("5"): $P(A \cap F \cap "5") = P(A) \cdot P(F) \cdot P("5")$

Estraendo invece due carte dal mazzo, senza rimettere la prima carta estratta (estrazione senza ripetizione, *il secondo evento non è indipendente dal primo*), le stesse probabilità valgono:

4. Asso (*A*) e figura (*F*): P(A∩F) = P(*A*) * P(*F* |*A*)

5. Una carta di coppe (C) e una carta di denari (D): $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D|C)$

6. Un asso, una figura, un cinque ("5"): $P(A \cap F \cap "5") = P(A) \cdot P(F|A) \cdot P("5"|A \cap F)$

Svolgimento

1. $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F) = \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{48}{1600}$

2. $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{100}{1600}$

3. $P(A \cap F \cap "5") = P(A) \cdot P(F) \cdot P("5") = \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{192}{64000}$

4. *P(A∩F) = P(A) * P(F |A) =* $\frac{4}{40} \cdot \frac{12}{39} = \frac{48}{1560}$

5. $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D|C) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{100}{1560}$

6. $P(A \cap F \cap "5") = P(A) \cdot P(F|A) \cdot P("5"|A \cap F) = \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{192}{59280}$

Esercizio n.3

Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare tre volte una moneta.
1. descrivere lo spazio campionario dell'esperimento;
2. si descriva l'evento "si ottengono più teste che croci" come composizione di eventi elementari.

Svolgimento:
Indicando con T l'evento "testa" e con C l'evento "croce" si ottiene:

1. spazio campionario:

$$S = \{(T,T,T),(T,C,T),(T,T,C),(C,T,T),(C,C,T),(C,T,C),(T,C,C)\}$$

2. Si definisca l'evento E "si ottengono più croci che teste"

$$E = (T \cap T \cap T) \cup (T \cap C \cap T) \cup (T \cap T \cap C) \cup (C \cap T \cap T)$$

Esercizio n. 4

Supposto che il tempo di durata di un macchinario segua una distruzione normale con media pari a 400 settimane e varianza pari a 900 settimane calcolare:

a) la probabilità che duri più di 490 settimane
b) la probabilità che duri tra le 340 e le 460 settimane

Soluzione

X ~ N (400; 900)
$\sigma = 30$

a)

$P(X > 490) = P\left(Z > \dfrac{490 - 400}{30}\right) = P\left(Z > 3\right)$

P(Z > 3) = 1 0,9987 = **0,0013**

b)

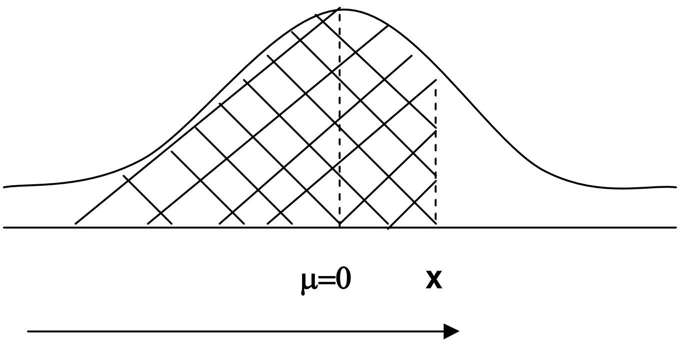
$P(340 \leq X \leq 460) = P\left(\dfrac{340 - 400}{30} \leq Z \leq \dfrac{460 - 400}{30}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) =$

$P(-2 \leq Z \leq 2) =$

$$\phi(0{,}2) - \phi(0) + \phi(2) - \phi(0) = (0{,}9772 - 0{,}5) + (0{,}9772 - 0{,}5) = 0{,}4472 + 0{,}4472 = 0{,}9544$$

Esercizio n. 5

X~N(2;1). Trovare il valore della *x* tale che P(X<x)=0,90



P=0,90 P(X < x) = 0,90

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 90% della Probabilità.

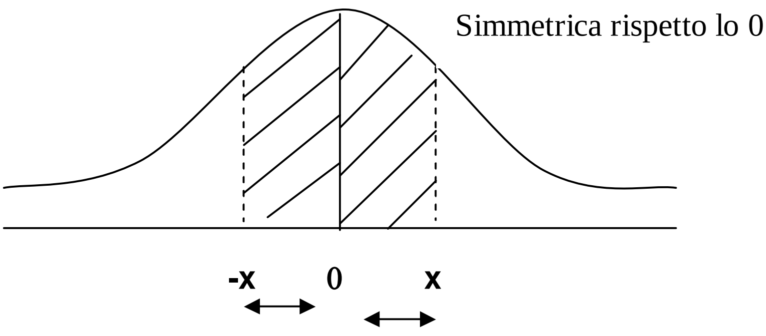
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

$P(Z < z) = 0{,}90 \quad z = 1{,}285 = (1{,}28 + 1{,}29)/2$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}285 \rightarrow \frac{x-2}{1} = 1{,}285 \rightarrow x = 2 + 1{,}285 = 3{,}285$

Esercizio n. 6

X~N(0;1). Trovare il valore della *x* tale che P(-x<X<x)=0, 5



P=0,25 P=0,25

La probabilità cumulata fino al valore x = P(X < x) = 0,75

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 75% della Probabilità.

La nostra X~N ed è standardizzata, per cui:

$P(Z < z) = 0{,}75 \quad z = 0{,}675 = (0{,}67 + 0{,}68)/2$

z = 0,675 $\longrightarrow$ P(0,75) è il 3°Quartile.

Esercizio n. 7

Il diametro in millimetri dei bulloni prodotti da un'azienda ha una distribuzione normale con media 12 e scarto quadratico medio 0,15. Si vuole calcolare che il diametro sia compreso tra 11,8 e 12,1 millimetri. Sia X la variabile casuale che descrive il diametro dei bulloni:

$$X \sim N(12;\ 0{,}15^2)$$

Soluzione

La probabilità che X assuma valori nell'intervallo (11,8; 12,1) è data da:

$P(11{,}8 \leq Z \leq 12{,}1) =$

$$P\left(\frac{11{,}8-12{,}0}{0{,}15} \leq Z \leq \frac{12{,}1-12{,}0}{0{,}15}\right) = P(-1{,}33 \leq z \leq 0{,}67) = \phi(0{,}67)-\phi(-1{,}33) = \phi(0{,}67)-[1-\phi(1{,}33)] =$$
$$= 0{,}7486-(1-0{,}9082) = 0{,}6568$$

Oppure $\phi(0{,}67)-\phi(0)+\phi(1{,}33)-\phi(0) = (0{,}7486-0{,}5)+(0{,}9082-0{,}5) = 0{,}2486+0{,}4082 = 0{,}6568$

Oppure $\phi(0{,}67)+\phi(1{,}33)-1 = 0{,}7486+0{,}9082-1 = 0{,}6568$