Esercitazione 8 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

11 Marzo 2011

Esercizio 1

Un'urna rossa contiene 3 palline bianche, 2 nere e 1 gialla. Si consideri l'estrazione di due palline. Si calcoli la probabilità di estrarre:

1. almeno una pallina nera;
2. due palline dello stesso colore;
3. una pallina bianca alla seconda estrazione;
4. due palline di colore diverso.

Le probabilità vanno calcolate nelle ipotesi di estrazione con e senza ripetizione.

Svolgimento

Indichiamo con:

- B_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina bianca nell'estrazione *i*"
- N_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina nera nell'estrazione *i*"
- G_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina gialla nell'estrazione *i*"

ESTRAZIONE CON RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$P(A) = P[N_1 \cap N_2] = P(N_1)P(N_2) = 2/6 \cdot 2/6 = 0{,}11$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$P(E) = P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap G_2)] =$$
$$= P(N_1)P(N_2) + P(B_1)P(B_2) + P(G_1)P(G_2) =$$
$$= 2/6 \cdot 2/6 + 3/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 1/6 = 0{,}389$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$P(F) = P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2)] =$$
$$= P(B_1)P(B_2) + P(N_1)P(B_2) + P(G_1)P(B_2) =$$
$$= 3/6 \cdot 3/6 + 2/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 3/6 = 0{,}361$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$P(G)=P\left[(B_1\cap N_2)\cup(B_1\cap G_2)\cup(N_1\cap G_2)\cup(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(G_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(B_1)P(N_2)+P(B_1)P(G_2)+P(N_1)P(G_2)+P(N_1)P(B_2)+P(G_1)P(B_2)+P(G_1)P(N_2)=$$
$$=3/6\cdot 2/6+3/6\cdot 1/6+2/6\cdot 1/6+2/6\cdot 3/6+1/6\cdot 3/6+1/6\cdot 3/6=0,639$$

ESTRAZIONE SENZA RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$P(A)=P\left[(N_1\cap N_2)\cup(N_1\cap\bar{N}_2)\cup(\bar{N}_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid N_1)P(N_1)+P(\bar{N}_2\mid N_1)P(N_1)+P(N_2\mid\bar{N}_1)P(\bar{N}_1)=$$
$$=2/6\cdot 1/5+2/6\cdot 4/5+4/6\cdot 2/5=0,60$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$P(E)=P\left[(N_1\cap N_2)\cup(B_1\cap B_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid N_1)P(N_1)+P(B_2\mid B_1)P(B_1)=$$
$$=2/6\cdot 1/5+3/6\cdot 2/5=0,22$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$P(F)=P\left[(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)\right]=$$
$$=P(N_1)P(B_2\mid N_1)+P(G_1)P(B_2\mid G_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=$$
$$=2/6\cdot 3/5+1/6\cdot 3/5+3/6\cdot 2/5=0,5$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$P(G)=P\left[(B_1\cap N_2)\cup(B_1\cap G_2)\cup(N_1\cap G_2)\cup(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(G_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid N_1)P(N_1)+$$
$$+P(B_2\mid N_1)P(N_1)+P(B_2\mid G_1)P(G_1)+P(N_2\mid G_1)P(G_1)$$
$$=2/5\cdot 3/6+1/5\cdot 3/6+1/5\cdot 2/6+3/5\cdot 2/6+3/5\cdot 1/6+2/5\cdot 1/6=0,73$$

Esercizio n. 2

Un corso di statistica è seguito da 200 studenti, dei quali il 60% è iscritto al corso di Laurea in Economia e Commercio e gli altri sono iscritti al corso di laurea in Scienze Politiche. La probabilità che uno studente sia iscritto al corso di laurea in Economia e superi l'esame è 0,45. Qual è la probabilità condizionata che uno studente superi l'esame sapendo che è iscritto al corso di laurea in Economia?

P(B) = 0,60

P(A ∩ B) = 0,45

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}45}{0{,}60} = 0{,}75$$

Esercizio n. 3

Un'azienda che vende fondi comuni di investimento ha raccolto informazioni tra i propri clienti circa la percentuale di capitale investito in fondi e il loro stato civile. I dati raccolti vengono presentati in tabella (dove la variabile percentuale di capitale è stata suddivisa in classi.

	[0;50]	[50;100]
Sposato/a	10	6
Celibe/Nubile	2	2
Vedovo/a	1	4

	[0;50]	[50;100]	TOTALE
Sposato/a	0,4	0,24	**0,64**
Celibe/Nubile	0,08	0,08	**0,16**
Vedovo/a	0,04	0,16	**0,20**
totale	**0,52**	**0,48**	**1**

Successivamente l'azienda desidera selezionare a caso alcuni clienti per acquisire ulteriori informazioni sui loro comportamenti di acquisto. In tale contesto, dato l'esperimento casuale "selezione di un cliente", vengono definiti i seguenti eventi:

A = estrazione di un cliente che sia sposato/a.
B = estrazione di un cliente che sia celibe/nubile.
C = estrazione di un cliente che investe fino ad un massimo del 50% del proprio capitale in fondi.
D = estrazione di un cliente che investe almeno il 50% del proprio capitale in fondi.

Si calcolino le probabilità

1) P($A \cup B$)
2) P($A \cap B$)
3) P($A \cup C$)

4) P($A \cap D$)
5) P($A \cup B \cap C$)

Soluzioni

1) P($A \cup B$) = $P(A)+P(B)=0{,}8$
2) P($A \cap B$) = Ø
3) P($A \cup C$) = $P(A)+P(C)-P(A\cap C)=0{,}64+0{,}52-0{,}3328=0{,}8272$
4) P($A \cap D$) = $P(A)*P(D)=0{,}64*0{,}48=0{,}3072$
5) P($A \cup B \cap C$) = $P(A)+[P(B)*P(C)]=0{,}64+0{,}0832=0{,}7232$

Esercizio n. 4

Si hanno tre scatole che contengono: la prima, 2 banconote da €100; la seconda, 1 banconota da €100e 1 da €50; la terza, 2 banconote da €50. Si scelga a caso una delle tre scatole (tra loro equiprobabili) e si estragga una banconota. Risulta estratta una banconota da €100; quale è la probabilità che la scatola dalla quale è stata estratta sia la prima?

Soluzione
Questo esercizio va risolto attraverso il teorema di Bayes. Avendo ipotizzato l'equiprobabilità di estrarre una delle tre scatole si ha che la probabilità a priori di estrarre una scatola qualsiasi è pari a 1/3. A questo punto se indichiamo con S_1, S_2, S_3 rispettivamente la prima, la seconda e la terza scatola e con C l'evento "estrazione di una banconota da €100" dobbiamo calcolare

$$P(S_1|C)=\frac{P(S_1)P(C|S_1)}{P(S_1)P(C|S_1)+P(S_2)P(C|S_2)+P(S_3)P(C|S_3)}=\frac{\frac{1}{3}*1}{\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*\frac{1}{2}+\frac{1}{3}*0}=\frac{2}{3}$$

Esercizio n.5
In un palazzo vivono solo tre famiglie: A, B, C, di 4 componenti ciascuna. La famiglia A è composta da 4 maschi, la B da 3 maschi e 1 femmina, la C da 2 maschi e 2 femmine. Considerando equiprobabile l'uscita di un componente di una qualunque delle tre famiglie, si osserva che dal portone esce una persona di sesso maschile. Quale è la probabilità che egli appartenga alla famiglia B?

Soluzione. Questo esercizio va risolto attraverso il teorema di Bayes. Considerando l'equiprobabilità dell'uscita dal portone di un componente di una qualunque delle tre famiglie si ha che P(A)=P(B)=P(C)=1/3. Indicando con M l'evento "l'individuo è maschio" dobbiamo calcolare

$$P(B|M)=\frac{P(B)P(M|B)}{P(A)P(M|A)+P(B)P(M|B)+P(C)P(M|C)}=\frac{\frac{1}{3}*\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*\frac{1}{4}+\frac{1}{3}*\frac{2}{4}}=0.143$$

Esercizio n. 6

Lanciando tre monete, si consideri la v.c. descritta dal numero delle teste che si presentano in una prova.

Spazio degli eventi	xi	pi	Pi
CCC	0	1/8	1/8
CCC			4/8
CTC	1	3/8	
TCC			
TTC			7/8
TCT	2	3/8	
CTT			
TTT	3	1/8	1

Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Applicando la formula del valore atteso: $\mu = E[X] = \sum_i x_i p_i$ abbiamo:

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$ per cui in una prova il numero atteso di “teste” è pari a 1,5.

Var(X) = $\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$ =

$$(0-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 + (1-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (2-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (3-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 = 0{,}75$$

Solitamente σ risulta un indice di variabilità più conveniente da utilizzare perché è espresso nella stessa unità di X.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$$

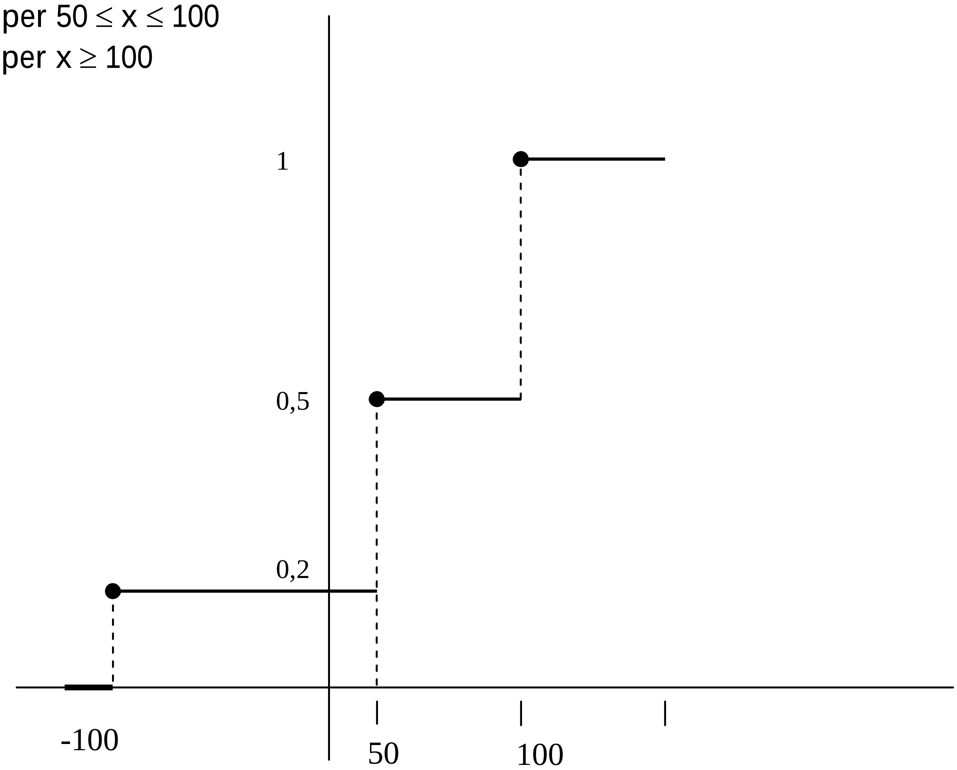
Il numero di “teste” che si presenta in ciascun lancio è diverso da quello atteso (1,5) mediamente per 0,866 teste.

Esercizio 7

Un negoziante di abbigliamento ha acquistato un capo per 100 euro. Egli può rivenderlo a 200 euro prima dei saldi oppure in saldi a 150 euro, infine il capo può rimanere invenduto in magazzino. La probabilità che lo rivenda prima dei saldi è 0,50 e la probabilità che lo rivenda in saldi è 0,30. Sia X la variabile casuale che descrive il profitto del negoziante su questo capo. Se la vendita avviene prima dei saldi si ha X = 100, se la vendita avviene nel periodo dei saldi, si ha X = 50, infine se il capo resta invenduto si ha X = -100.
La funzione di probabilità di X è riportata in tabella 1.

PROFITTO	-100	50	100
Probabilita’	0,20	0,30	0,50

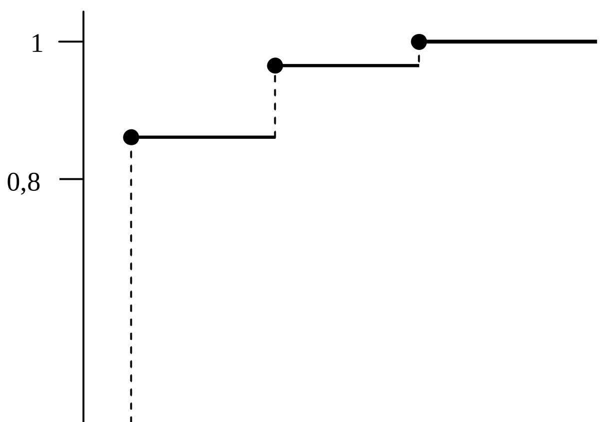
F(x)=0 per x < -100
F(x)=0,2 per -100 ≤ x ≤ 50
F(x)=0,5 (0,2 +0,3) per 50 ≤ x ≤ 100
F(x)=1 per x ≥ 100



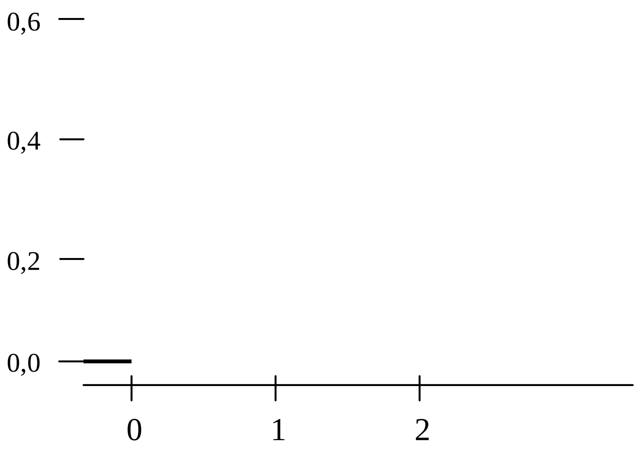
Esercizio 7

Una fabbrica produce quadri per appendere quadri e li vende in confezioni da 20. Il proprietario della fabbrica ha stimato che la probabilità che in una scatola non vi siano ganci difettosi è 0,85, la probabilità che vi sia un gancio difettoso è 0,12, e la probabilità che vi siano due ganci difettosi è 0,03.
Sia X la variabile casuale che descrive il numero di ganci difettosi, la distribuzione di X è riportata in tabella 2.

GANCI DIFETTOSI	0	1	2
Probabilita’	0,85	0,12	0,03



F(x)=0, per x < 0
F(x)=0,85 per 0 ≤ x ≤ 1
F(x)=0,97 per 1 ≤ x ≤ 2
F(x)=1 per x ≥ 2



b. Nel caso di variabili casuali discrete il valore atteso è dato da

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i p_i$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = 0 \times 0{,}85 + 1 \times 0{,}12 + 2 \times 0{,}03 = 0{,}18$$

Tale risultato può essere interpretato nel modo seguente: se si considera un elevato numero di scatole il numero medio di ganci difettosi per scatola è 0,18.

Per le variabili casuali discrete la varianza è data da:

$$\sigma^2 = \sum_i (xi - \mu)^2 p_i$$

Nel nostro caso la varianza è data da:

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{2} (x - \mu)^2 P(X = x) = (0 - 0{,}18)^2 \times 0{,}85 + (1 - 0{,}18)^2 \times 0{,}12 + (2 - 0{,}18)^2 \times 0{,}03 = 0{,}21$$

La varianza può anche essere calcolata come differenza tra il valore atteso del quadrato di X e il quadrato della media.

$$\sigma^2 = Var(X) = E[X^2] - \mu^2$$
$$E[X^2] = 0 \times 0{,}85 + 1 \times 0{,}12 + 4 \times 0{,}03 = 0{,}24$$
$$\mu^2 = 0{,}18^2 = 0{,}03$$
$$\sigma^2 = 0{,}24 - 0{,}03 = 0{,}21$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_2} = 0{,}458$$