Esercitazione 5 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

8 Novembre 2011

In alcune circostanze si pone un maggior interesse sullo studio della variabilità tra le singole unità statistiche, piuttosto che lo studio della variabilità rispetto ad un centro. Lo studio della mutua variabilità è possibile attraverso il calcolo dell'indice Delta (Δ) che rappresenta la media delle differenze, in valore assoluto, di tutte le possibili coppie senza ripetizioni.

Esercizio n 1

Data la distribuzione del carattere Reddito dei soli maschi, espresso in migliaia di euro, se ne misuri il grado di concentrazione.

Xi	Sesso	Reddito
1	M	2,5
2	M	2,8
3	M	3,0
4	M	3,0
5	M	3,1
6	M	3,5
7	M	4,0

$$\Delta = \frac{\sum_{i \neq j = 1}^{n} \left| x_i - x_j \right|}{n(n-1)}$$

Si dispongono i valori ordinati in una tabella doppia sia in riga che in colonna:

	2,5	2,8	3	3	3,1	3,5	4
2,5							
2,8							
3							
3							
3,1							
3,5							
4							

In modo da calcolare facilmente le differenze di tutte le possibili coppie

	2,5	2,8	3	3	3,1	3,5	4
2,5	0	0,3	0,5	0,5	0,6	1	1,5
2,8	0,3	0	0,2	0,2	0,3	0,7	1,2
3	0,5	0,2	0	0	0,1	0,5	1
3	0,5	0,2	0	0	0,1	0,5	1
3,1	0,6	0,3	0,1	0,1	0	0,4	0,9
3,5	1	0,7	0,5	0,5	0,4	0	0,5
4	1,5	1,2	1	1	0,9	0,5	0

Effettuando la somma degli elementi di ogni colonna (marginale di colonna) si ha:

4,4	2,9	2,3	2,3	2,4	3,6	6,1

Effettuando la somma dei marginali di colonna si ottiene il valore 24 che corrisponde al numeratore dell'indice Delta Δ. Adesso disponiamo di tutti i dati per poter calcolare l'indice.

$$\Delta = \frac{\sum_{i \neq j = 1}^{n} \left| x_i - x_j \right|}{n(n-1)} = \frac{24}{42} = 0{,}57$$

Quando tutte le modalità coincidono, l'indice Delta assume valore zero (Δ = 0).In presenza di caratteri trasferibili è possibile calcolare la variabilità massima e quindi il valore massimo di Delta .
L'indice Delta assume il valore massimo quando tutte le modalità tranne una sono nulle (Δ = 2μ).
Il Rapporto di Concentrazione (R) di Gini si ottiene dividendo Delta per il suo valore massimo.

$$R = \frac{\Delta}{2\mu}$$

Si tratta di un indice relativo che varia tra 0 ed 1. $0 \leq R \leq 1$

R=0 si ha concentrazione minima.
R=1 si ha concentrazione massima.

Nel nostro esercizio la media del reddito dei maschi è pari a

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{24}{7} = 3{,}42$$

Quindi il massimo valore che può assumere Delta sarà:

$$2\mu = 3{,}42 \cdot 2 = 6{,}86$$

Per cui il rapporto Concentrazione di Gini (R) sarà pari a

$$R = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{0{,}57}{6{,}86} = 0{,}083$$

Esercizio 2

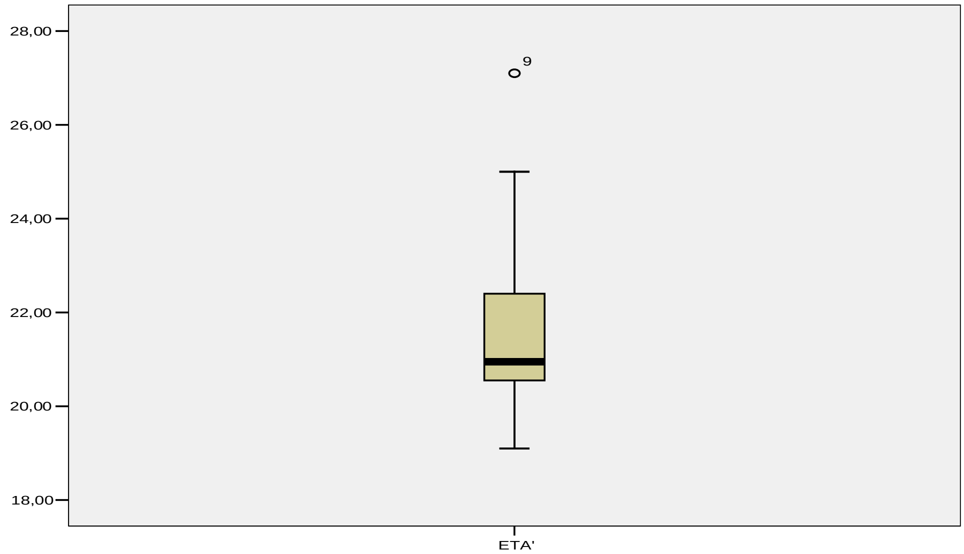
A partire dalla distribuzione della variabile Età, costruire il boxplot

ETA'	ni	fi	Ni	Fi
19,1	1	0,05	1	0,05
19,2	1	0,05	2	0,1
20,2	1	0,05	3	0,15
20,3	1	0,05	4	0,2
20,5	1	0,05	5	0,25
20,6	2	0,1	7	0,35
20,8	2	0,1	9	0,45
20,9	1	0,05	10	0,5
21	2	0,1	12	0,6
21,4	1	0,05	13	0,65
21,8	1	0,05	14	0,7
22,1	1	0,05	15	0,75
22,7	1	0,05	16	0,8
23,3	1	0,05	17	0,85
23,9	1	0,05	18	0,9
25	1	0,05	19	0,95
27,1	1	0,05	20	1
totale	20	1		

Q1 = 20,5 Me= 20,9 Q3= 22,1

a = Q1 – 1,5 (Q3 –Q1) = 20,5 -1,5 (22,1-20,5) = 18
b = Q3 + 1,5 (Q3 –Q1)= 22,1 +1,5 (22,1-20,5) = 24,5

α = min = 19,1
β = max = 27,1



Esercizio n 3

Calcolare gli indici di forma per il carattere Età suddiviso in 3 classi equifrequenti.

a) L'indice di Fisher, è un indice di forma basato sui momenti terzi standardizzati:

$$\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3 n_i \qquad \begin{array}{l} \gamma > 0 \rightarrow AsimmetricaPositiva; \\ \gamma = 0 \rightarrow Simmetrica; \\ \gamma < 0 \rightarrow AsimmetricaNegativa; \end{array}$$

Partendo dalla distribuzione in classi del carattere Età,

Ci	ni	fi	Ni	Fi	$\hat{c}_i$
C1 = [19,1; 20,6]	7	0,35	7	0,35	19,85
C2 =] 20,6; 21,8]	7	0,35	14	0,70	21,2
C3 =] 21,8; 27,1]	6	0,30	20	1	24,45
Totali	20	1,00			

Calcoliamo dapprima la media aritmetica e la mediana

Media = $\mu_X = \frac{\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i \cdot n_i}{n}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(19,85 \times 7 + 21,2 \times 7 + 24,45 \times 6)}{20} = 21,7$$

$$\boxed{Me \cong x_{Me-1} + \left(x_{Me} - x_{Me-1}\right)\frac{0,5 - F_{Me-1}}{F_{Me} - F_{Me-1}}}$$

Mediana

$$Me = 20{,}6 + (21{,}8 - 20{,}6) \cdot \frac{0{,}5 - 0{,}35}{0{,}70 - 0{,}35} = 21{,}11$$

$$Q_1 = 19{,}1 + (20{,}6 - 19{,}1) \cdot \frac{0{,}25 - 0}{0{,}35 - 0} = 20{,}17$$

$$Q_3 = 21{,}8 + (27{,}1 - 21{,}8) \cdot \frac{0{,}75 - 0{,}70}{1 - 0{,}70} = 22{,}68$$

Poi la **varianza**

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{c}_i - \bar{x}\right)^2 * n_i = \frac{(19{,}85 - 21{,}7)^2 \cdot 7 + (21{,}2 - 21{,}7)^2 \cdot 7 + (24{,}45 - 21{,}7)^2 \cdot 6}{20} = 3{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}9$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi utili per calcolare l'indice di asimmetria di Fisher.

xi	ni	$\hat{c}_i$	$\hat{c}_i - \bar{x}$	$Z_i = \frac{(\hat{c}_i - \bar{x})}{\sigma}$	$Z_i = \left(\frac{(\hat{c}_i - \bar{x})}{\sigma}\right)^3$	$(Z_i) \cdot n_i$
C1 = [19,1;20,6]	7	19,85	-1,85	-0,97	-0,91	-6,37
C2 =] 20,6; 21,8]	7	21,2	-0,5	-0,26	-0,0175	-0,1225
C3 =] 21,8; 27,1]	6	24,45	2,75	1,45	3,05	18,3
Totali	20					11,8

$$\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{c}_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^3 \cdot n_i = \frac{11{,}8}{20} = 0{,}59$$

Possiamo concludere che la distribuzione è caratterizzata da un'asimmetria positiva (indice maggiore di zero).

Tale risultato è confermato dal **confronto tra la mediana e la media aritmetica**.

$$\bar{x} = 21{,}7 > Me = 21{,}11$$

b) Indice **Yule-Bowley** = $\frac{2Me - Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$

$A_{YB} = 0$ Simmetria

$A_{YB} < 0$ Asimmetria Positiva

$A_{YB} > 0$ Asimmetria Negativa

Me= 21,11
Q_1 = 20,17
Q_3 = 22,68

Yule-Bowley =ί $\underline{2*21{,}11-22{,}68-20{,}17}$ = $\frac{-0{,}63}{2{,}51}=-0{,}25$ **Asimmetria positiva**

c) **Hotelling-Solomon** $\frac{\mu_x - Me}{\sigma}$ =

Hotelling-Solomon = $\frac{21{,}7 - 21{,}11}{1{,}9}$=0,31 = **Asimmetria positiva**

Esercizio 4

Facendo riferimento alla distribuzione di frequenza della variabile QUADRATURA ABITAZIONE in 5 classi come di seguito riportata calcolare la differenza media semplice e la differenza media quadratica.

Quadratura abitazione	Frequenze assolute
[85, 95[	4
[95, 105[	16
[105, 115[	13
[115, 125[	4
[125, 135[	3
	40

Per una distribuzione di frequenza la differenza media semplice o indice di mutua variabilità si calcola come segue:

$$\Delta = \frac{\sum_{i \neq j=1}^{n} \left| x_i - x_j \right| n_i \cdot n_j}{n(n-1)}$$

Si chiama differenza media assoluta la media aritmetica dei valori assoluti delle differenze. Tale differenza si dice con ripetizione se si considerano tutte le n^2 differenze (cioè comprese le nulle); senza ripetizione se si considerano solo le n(n −1) differenze ottenute escludendo i termini nulli della diagonale principale.

	4	16	13	4	3
	90	100	110	120	130
90	0	640	1040	480	480
100	640	0	2080	1280	1440
110	1040	2080	0	520	780
120	480	1280	520	0	120
130	480	1440	780	120	0

$$\Delta = \frac{\sum_{i \neq j=1}^{n} |x_i - x_j| n_i \cdot n_j}{n(n-1)} = \frac{17720}{40(40-1)} = 11,3$$

Differenza quadratica media

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i \neq j=1}^{n} |x_i - x_j|^2 n_i \cdot n_j}{n(n-1)}}$$

Differenze quadratiche

	4	16	13	4	3
4	0	100	400	900	1600
16	100	0	100	400	900
13	400	100	0	100	400
4	900	400	100	0	100
3	1600	900	400	100	0

Calcoli con le frequenze

0	6400	20800	14400	19200
6400	0	20800	25600	43200
20800	20800	0	5200	1200
14400	25600	1300	0	1200
19200	43200	15600	1200	0

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i \neq j=1}^{n} |x_i - x_j|^2 n_i \cdot n_j}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{326500}{1560}} = 14,46$$