Esercitazione 8 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

5 Marzo 2009

Esercizio 1

Un'urna rossa contiene 3 palline bianche, 2 nere e 1 gialla. Si consideri l'estrazione di due palline. Si calcoli la probabilità di estrarre:

1. almeno una pallina nera;
2. due palline dello stesso colore;
3. una pallina bianca alla seconda estrazione;
4. due palline di colore diverso.

Le probabilità vanno calcolate nelle ipotesi di estrazione con e senza ripetizione.

Svolgimento

Indichiamo con:

- B_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina bianca nell'estrazione *i*"
- N_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina nera nell'estrazione *i*"
- G_i *(i=1,2,)* l'evento "una pallina gialla nell'estrazione *i*"

ESTRAZIONE CON RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$P(A) = P[N_1 \cap N_2] = P(N_1)P(N_2) = 2/6 \cdot 2/6 = 0{,}11$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$\begin{aligned} P(E) &= P[(N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap G_2)] = \\ &= P(N_1)P(N_2) + P(B_1)P(B_2) + P(G_1)P(G_2) = \\ &= 2/6 \cdot 2/6 + 3/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 1/6 = 0{,}389 \end{aligned}$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$\begin{aligned} P(F) &= P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2) \cup (G_1 \cap B_2)] = \\ &= P(B_1)P(B_2) + P(N_1)P(B_2) + P(G_1)P(B_2) = \\ &= 3/6 \cdot 3/6 + 2/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 3/6 = 0{,}361 \end{aligned}$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$P(G)=P\left[(B_1\cap N_2)\cup(B_1\cap G_2)\cup(N_1\cap G_2)\cup(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(G_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(B_1)P(N_2)+P(B_1)P(G_2)+P(N_1)P(G_2)+P(N_1)P(B_2)+P(G_1)P(B_2)+P(G_1)P(N_2)=$$
$$=3/6\cdot 2/6+3/6\cdot 1/6+2/6\cdot 1/6+2/6\cdot 3/6+1/6\cdot 3/6+1/6\cdot 3/6=0,639$$

ESTRAZIONE SENZA RIPETIZIONE

1. Definiamo l'evento: A = "almeno una pallina nera"

$$P(A)=P\left[(N_1\cap N_2)\cup(N_1\cap \bar{N}_2)\cup(\bar{N}_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid N_1)P(N_1)+P(\bar{N}_2\mid N_1)P(N_1)+P(N_2\mid \bar{N}_1)P(\bar{N}_1)=$$
$$=2/6\cdot 1/5+2/6\cdot 4/5+4/6\cdot 2/5=0,60$$

2. Definiamo l'evento: E = "due palline dello stesso colore"

$$P(E)=P\left[(N_1\cap N_2)\cup(B_1\cap B_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid N_1)P(N_1)+P(B_2\mid B_1)P(B_1)=$$
$$=2/6\cdot 1/5+3/6\cdot 2/5=0,22$$

3. Definiamo l'evento: F = "una pallina bianca alla seconda estrazione"

$$P(F)=P\left[(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)\right]=$$
$$=P(N_1)P(B_2\mid N_1)+P(G_1)P(B_2\mid G_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=$$
$$=2/6\cdot 3/5+1/6\cdot 3/5+3/6\cdot 2/5=0,5$$

4. Definiamo l'evento: G = "due palline di colore diverso"

$$P(G)=P\left[(B_1\cap N_2)\cup(B_1\cap G_2)\cup(N_1\cap G_2)\cup(N_1\cap B_2)\cup(G_1\cap B_2)\cup(G_1\cap N_2)\right]=$$
$$=P(N_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid B_1)P(B_1)+P(G_2\mid N_1)P(N_1)+$$
$$+P(B_2\mid N_1)P(N_1)+P(B_2\mid G_1)P(G_1)+P(N_2\mid G_1)P(G_1)$$
$$=2/5\cdot 3/6+1/5\cdot 3/6+1/5\cdot 2/6+3/5\cdot 2/6+3/5\cdot 1/6+2/5\cdot 1/6=0,73$$

Esercizio n. 2

Un corso di diritto commerciale è seguito da 200 studenti, dei quali il 60% è iscritto al corso di Laurea in Economia e Commercio e gli altri sono iscritti al corso di laurea in Giurisprudenza. La probabilità che uno studente sia iscritto al corso di laurea in Economia e superi l'esame è 0,45. Qual è la probabilità condizionata che uno studente superi l'esame sapendo che è iscritto al corso di laurea in Economia?

P(B) = 0,60

P(A ∩ B) = 0,45

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}45}{0{,}60} = 0{,}75$$

Esercizio n. 3

Un'azienda che vende fondi comuni di investimento ha raccolto informazioni tra i propri clienti circa la percentuale di capitale investito in fondi e il loro stato civile. I dati raccolti vengono presentati in tabella (dove la variabile percentuale di capitale è stata suddivisa in classi.

	[0;50]	[50;100]
Sposato/a	10	6
Celibe/Nubile	2	2
Vedovo/a	1	4

	[0;50]	[50;100]	TOTALE
Sposato/a	0,4	0,24	**0,64**
Celibe/Nubile	0,08	0,08	**0,16**
Vedovo/a	0,04	0,16	**0,20**
totale	**0,52**	**0,48**	**1**

Successivamente l'azienda desidera selezionare a caso alcuni clienti per acquisire ulteriori informazioni sui loro comportamenti di acquisto. In tale contesto, dato l'esperimento casuale "selezione di un cliente", vengono definiti i seguenti eventi:

A = estrazione di un cliente che sia sposato/a.
B = estrazione di un cliente che sia celibe/nubile.
C = estrazione di un cliente che investe fino ad un massimo del 50% del proprio capitale in fondi.
D = estrazione di un cliente che investe almeno il 50% del proprio capitale in fondi.

Si calcolino le probabilità

1) P($A \cup B$)
2) P($A \cap B$)
3) P($A \cup C$)

4) P($A \cap D$)
5) P($A \cup B \cap C$)

Soluzioni

1) P($A \cup B$) = $P(A) + P(B) = 0{,}8$
2) P($A \cap B$) = Ø
3) P($A \cup C$) = $P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}64 + 0{,}52 - 0{,}3328 = 0{,}8272$
4) P($A \cap D$) = $P(A) * P(D) = 0{,}64 * 0{,}48 = 0{,}3072$
5) P($A \cup B \cap C$) = $P(A) + [P(B) * P(C)] = 0{,}64 + 0{,}0832 = 0{,}7232$

Esercizio n. 4

Un'azienda vinicola produce sia vino da tavola sia vino DOC. La sua produzione è distribuita attraverso due canali: il 65% è destinata ai supermercati e la parte restante alle enoteche. La probabilità che sia richiesto vino DOC, dato che l'ordine proviene da un supermercato, è 0,25; mentre la probabilità che sia richiesto vino DOC, dato che è un'enoteca a emettere l'ordine, è 0,80.

- Qual è la probabilità che sia richiesto vino DOC?
- Qual è la probabilità che l'ordine provenga da un'enoteca sapendo che è stata richiesta la qualità DOC?
- Qual è la probabilità che l'ordine provenga da un supermercato, sapendo che è stata richiesta la qualità DOC?

Il teorema di Bayes

$$\boxed{P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)}}$$

$P(E_i)$ = Probabilità a priori — Sono le probabilità delle singole cause e non dipendono dal verificarsi o meno dall'effetto A.

$P(A|E_i)$ = Verosimiglianze — Sono le probabilità con cui le singole cause E_i determinano l'effetto A. Sono note o determinabili.

$P(E_i|A)$ = Probabilità a posteriori — Sapendo che l'effetto A si è verificato, è la probabilità con cui sia stato la causa E_i a determinarlo.

Il teorema di Bayes consente di correggere le informazioni a priori, $P(E_i)$, sulla base delle evidenze sperimentali, o verosimiglianze, $P(A|E_i)$, fornendo le probabilità a posteriori, $P(E_i|A)$.

Sappiamo: A = vino d'oc S, E = canali di distribuzione

	S	E
Probabilità a priori:	P(S)=0,5	P(E)=0,8
Verosimiglianze:	P(VD|S)	P(VD|E)
Cerchiamo: Probabilità a posteriori:	P(S|VD)	P(E|VD)

A) Si risolve applicando il teorema delle probabilità totali:

$$P(S)\cdot P(VD|S)+P(E)\cdot P(VD|E)=0,65\times 0,25+0,35\times 0,80=0,4425$$

B) $P(E|VD)=$

$$\frac{P(E)\cdot P(VD|E)}{0,4425}=\frac{0,35\times 0,80}{0,4425}=\frac{0,28}{0,4425}=0,6328$$

C) $P(S|VD)=$

$$\frac{P(S)\cdot P(VD|S)}{0,4425}=\frac{0,25\times 0,65}{0,4425}=\frac{0,1625}{0,4425}=0,3672$$