Esercitazione 7 del corso di Statistica (parte 1)

Dott.ssa Paola Costantini

5 Marzo 2011

Esercizio 1

Sullo spazio campionario:

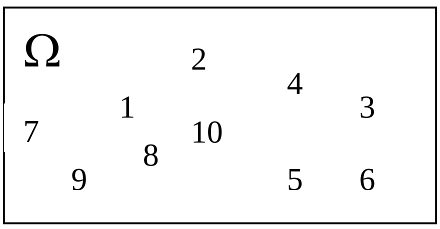
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

considerando l'esperimento casuale "estrazione di un numero", determinare, rappresentare mediante diagrammi di Venn e calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

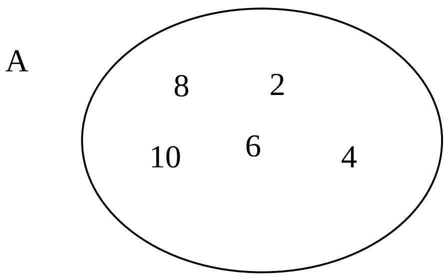
a) A = estrazione di numero pari;
b) B = estrazione di numero dispari;
c) C = estrazione di numero > 7
d) Negazione di C
e) $A \cap C$
f) $A \cup C$

Soluzione

Lo spazio campione è rappresentato graficamente come segue:

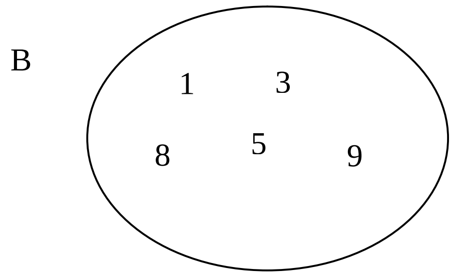


a)
L'evento A = "estrazione di un numero pari" è costituito dagli eventi elementari: $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{10\}$ ed è rappresentato graficamente come segue:



$$P(A) = \frac{\text{numero di elementi pari}}{\text{numero totale di elementi di } \Omega} = \frac{5}{10} = 0,5$$

b)
L’evento B = “estrazione di un numero dispari” è costituito dagli eventi elementari: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$ ed è rappresentato graficamente come segue:



$$P(B) = \frac{\text{numero di elementi dispari}}{\text{numero totale di elementi di } \Omega} = \frac{5}{10} = 0,5$$

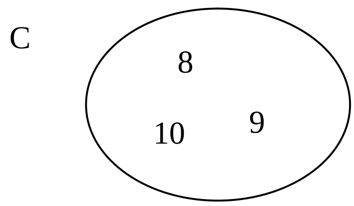
Nota:
A e B rappresentano una partizione di Ω, pertanto essi sono due eventi necessari ed incompatibili. Quindi la loro unione è Ω:

$$A \cup B = \Omega$$

mentre la loro intersezione è nulla:

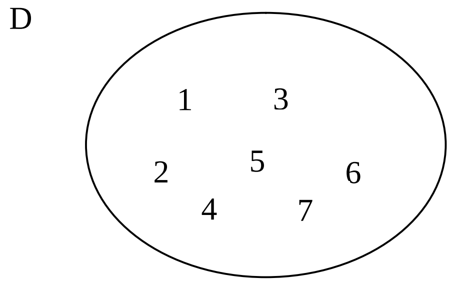
$$A \cap B = \varnothing$$

c)
L’evento C = “estrazione di un numero maggiore di 7” è costituito dagli eventi elementari: $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$ ed è rappresentato graficamente come segue:



$$P(B) = \frac{\text{numero di elementi} > 7}{\text{numero totale di elementi di } \Omega} = \frac{3}{10} = 0,3$$

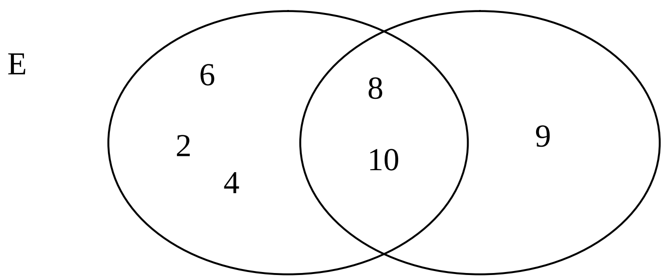
d)
L'evento C è dato degli elementi di Ω che non fanno parte di C, ossia {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}.



$$P\left(\bar{C}\right) = \frac{\text{numero di elementi } \leq 7}{\text{numero totale di elementi di } \Omega} = \frac{7}{10} = 0,7$$

e)
L'evento $E_1 = A \cap C$ è costituito dagli elementi che fanno parte sia di A sia di C, ossia {8}, {10}:

$A \cap C$



$$P\left(E_1\right) = P\left(A \cap C\right) = \frac{2}{10} = 0,2$$

Avremmo potuto calcolare $P(E_1)$ in base al <u>Teorema delle probabilità composte</u>:

$$P(A \cap C) = P(A \mid C) \times P(C) = P(C \mid A) \times P(A)$$

utilizzando i valori:

$$P(A \mid C) = \frac{2}{3} \qquad\qquad P(C \mid A) = \frac{2}{5}$$

ovvero

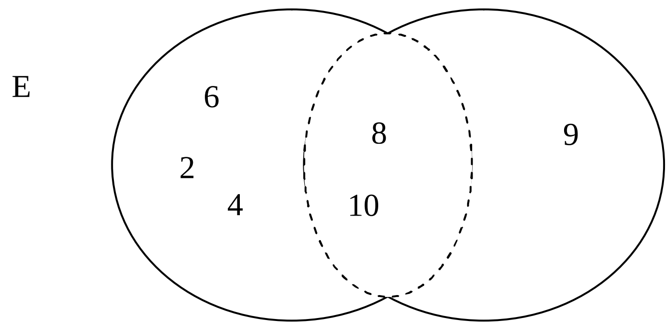
$$P(C) = \frac{3}{10} \qquad\qquad P(A) = \frac{5}{10}$$

da cui:

$$P(A \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{10} = 0,2$$

f)
L'evento $E_2 = A \cup C$ è costituito dagli elementi che fanno parte di A o di C, ossia $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$

$A \cup C$



$$P(E_2) = P(A \cup C) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Avremmo potuto calcolare $P(E_2)$ in base al <u>Teorema delle probabilità totali</u>:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,2 = 0,6$$

Esercizio 2

Di due diverse lotterie sono stati venduti rispettivamente 200 e 350 biglietti. Avendo acquistato 15 biglietti dalla prima e 22 dalla seconda, in quale delle due lotterie si ha maggiore probabilità di vincere il primo premio?

Le probabilità di vittoria sono:

- prima lotteria: 15/200= 0,075
- seconda lotteria: 22/350 = 0,063

Quindi si ha maggiore probabilità di vincere nella prima lotteria.

$$P(A) = \frac{1}{150} = 0{,}00666;$$

b. Essendo già stato estratto il primo premio, non vinto dal possessore del biglietto, la probabilità che vinca il secondo premio è data dalla somma dei due secondi premi disponibili

$$P(B \mid A) = \frac{2}{149} + \frac{1}{148} = 0{,}02 \; ;$$

c. La probabilità che vinca il terzo premio è data dalla somma dei tre terzi premi disponibili

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{3}{147} + \frac{2}{146} + \frac{1}{145} = 0{,}04$$

Esercizio 3

Una persona ha comprato uno dei 150 biglietti di una lotteria. La lotteria offre un primo premio, due secondi premi e tre terzi premi. Considerando che i premi sono estratti in successione decrescente, qual è la probabilità che il possessore vinca:

a. Il primo premio
b. Il secondo premio, dato che non ha vinto il primo.
c. Il terzo premio, dato che non ha vinto né il primo né il secondo.

Soluzione
Definiti come segue i tre eventi
A = primo premio; B = secondo premio; C = terzo premio.
a. La probabilità che il possessore vinca il primo premio è pari a

Esercizio 4

Si consideri una scatola contenente 15 lampadine di cui 3 difettose, si prendano 3 lampadine (senza reimissione) e si calcoli la probabilità che siano tutte e tre difettose.

Soluzione

Definito = E_i “lampadina dell’i-ma estrazione è difettosa”, la probabilità che la prima lampadina estratta sia difettosa è p

$$P(E_1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

La probabilità che anche la seconda lampadina estratta sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento 1 E , è pari a

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7};$$

Infine la probabilità che la terza lampadina sia difettosa, condizionata al verificarsi dell'evento 1 E e dell'evento 2 E (intersezione di entrambi gli eventi) è pari a

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{1}{13}.$$

Quindi la probabilità che le tre lampadine siano tutte difettose sarà pari a

$$P(A \cap B \cap C) = P(E_1)\, P(E_2 \mid E_1)\, P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = 0{,}002$$

Esercizio 5

L'urna A contiene 3 palline rosse e 3 nere, l'urna B contiene 4 palline rosse e 6 nere. Calcolare:

a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A.
b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B.

Soluzione
Indichiamo con:
R_A= {la pallina estratta dall'urna A è rossa}
R_B = {la pallina estratta dall'urna B è rossa}

a) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A è: $P(R_A) = \frac{3}{6}$

b) La probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna B è: $P(R_B) = \frac{4}{10}$

Esercizio 6

Si consideri un'urna contenente 30 palline di cui 3 di colore rosso e le restanti 27 di colore nero. Si prendano 3 palline (senza reimissione) e si calcoli la probabilità che siano tutte e tre rosse.

Soluzione

La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è:

$$P(R_1) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0,1$$

La probabilità che anche la seconda pallina estratta sia rossa è condizionata dal verificarsi dell'evento R_1

$$P(R_2|R_1) = \frac{2}{29} = 0,069$$

Infine, la probabilità che la terza pallina sia rossa è condizionata al verificarsi dell'evento R_1 e dell'evento R_2 (intersezione di entrambi gli eventi)

$$P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{1}{28} = 0,036$$

Quindi la probabilità che le tre palline siano tutte rosse sarà pari a:

$$P(A \cap B \cap C) = P(R_1) \bullet P(R_2|R_1) \bullet P(R_3|R_1 \cap R_2) = 0,000246$$