Università di Cassino

Esercitazioni di Statistica 1 - *11 Febbraio 2011*

Dott. Mirko Bevilacqua

ESERCIZIO N° 1

Il capitale (in milioni di euro) di una Società è suddiviso tra i soci nel seguente modo:

Socio	Sig. Rossi	Sig. Bianchi	Sig. Verde	Sig. Zaza
Capitale	3	1	0,5	10

a) Calcolare la variabilità del capitale mediante la differenza media semplice e il grado di concentrazione.

b) Rappresentare la concentrazione del capitale mediante la spezzata di Lorenz.

1.a

In presenza di caratteri trasferibili (reddito, risorse energetiche, consumo di beni) è di maggiore interesse lo studio della variabilità tra le singole unità statistiche piuttosto che la variabilità rispetto a un centro.
Un carattere quantitativo trasferibile X con n valori osservati $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ si dice equidistribuito se ognuna delle n unità statistiche possiede 1/n dell'ammontare complessivo del carattere.
La situazione di massima concentrazione si ha quando l'intero ammontare del carattere è posseduto da una sola unità del collettivo.

Differenza Media Semplice

Il calcolo si basa sulle differenze tra tutte le coppie di unità statistiche.

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|}{n(n-1)}$$

1°metodo

X_i	n_i	$\|X_i-X_j\|$
3	2,00	2,00
1	2,50	2,50
0,5	-7,00	7,00
10	-2,00	2
	0,50	0,50
	-9,00	9,00
	-2,50	2,50
	-0,50	0,50
	-9,50	9,50
	7	7,00
	9	9,00
	9,5	9,50
		61,00

$$\Delta = \frac{61}{4 \cdot 3} = 5{,}08$$

2°metodo

	3	1	0,5	10
3	0			
1	2	0		
0,5	2,5	0,5	0	
10	7	9	9,5	0

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|}{n(n-1)} = \frac{2\sum_{i>j}|x_i - x_j|}{n(n-1)}$$

$$\Delta = \frac{2 \cdot (2 + 0,5 + 2,5 + 7 + 9 + 9,5)}{4 \cdot 3} = 5,08$$

$\mu = 3,625$ $\qquad\qquad \Delta_{MAX} = 2\mu = 2 \times 3,625 = 7,25$

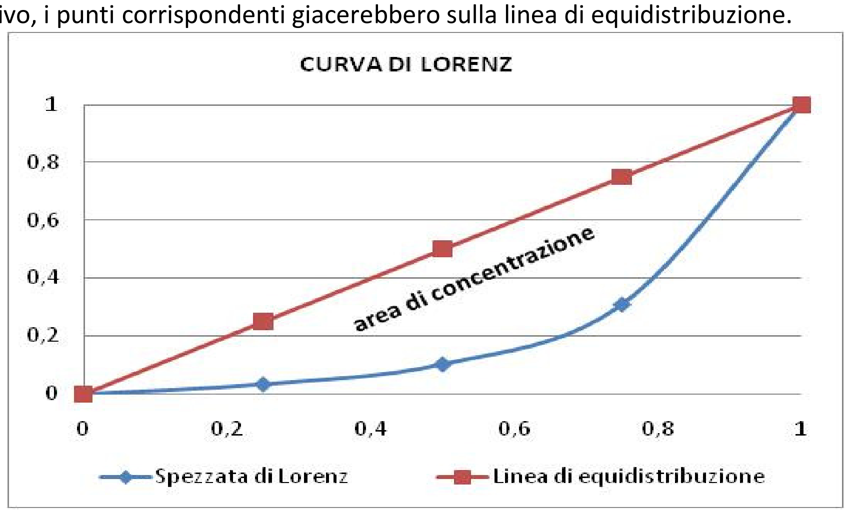
Differenza media semplice normalizzata $0 \le R \le 1$:

$$R = \frac{\Delta}{\Delta_{max}} = \frac{5,083}{7,25} = 0,70$$

1.b

x_i	n_i	f_i	s_i	q_i	p_i	p_i-q_i
0,5	1	0,25	0,5	0,03	0,25	0,22
1	1	0,25	1,5	0,10	0,5	0,40
3	1	0,25	4,5	0,31	0,75	0,44
10	1	0,25	14,5	1	1	0
Totale	4					1,06

Per costruire la curva di Lorenz bisogna riportare sull'asse delle ascisse i valori di p_i e sull'asse delle ordinate i valori di q_i. I punti possono poi essere congiunti da segmenti tali da formare una curva detta spezzata di concentrazione o curva di Lorenz, dal nome del primo autore che ne propose l'impiego.
Nel grafico sotto oltre alla spezzata di concentrazione viene rappresentata la linea di equidistribuzione che è il segmento che congiunge i punti (0,0) e (1,1). Ogni punto situato su tale segmento ha la proprietà di avere le coordinate uguali cioè $p_i = q_i$. così se l'ammontare del carattere fosse equidistribuito fra tutte le unità del collettivo, i punti corrispondenti giacerebbero sulla linea di equidistribuzione.



L’area della superficie compresa tra la curva di Lorenz e la linea di equidistribuzione viene detta area di concentrazione.

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{1,06}{1,5} = 0,70$$

Il valore di R (0,7) segnale una concentrazione di capitale della società abbastanza elevata.

ESERCIZIO N° 2

Sia data la variabile X = reddito mensile in migliaia di euro, rilevata su un collettivo di famiglie come segue:

Reddito (X_i)	N° di Famiglie (n_i)
1	1
2	0
3	5
4	4

a) Trovare la moda del reddito
b) Trovare lo scarto quadratico medio del reddito
c) Trovare lo scarto quadratico medio del reddito nell'ipotesi che ad ogni famiglia venga dato un aumento di stipendio di 500 euro
d) Trovare il rapporto di concentrazione per il reddito

2.a

Moda$_{(reddito)}$ =3.000 euro

2.b

X	x^2	n_i	f_i	F_i
1	1	1	0,1	0,1
2	4	0	0	0,1
3	9	5	0,5	0,6
4	16	4	0,4	1
		10		

$$\mu_{x^2} = \frac{1+4\cdot0+9\cdot5+16\cdot4}{10} = 11$$

$$\mu_x = \frac{1+15+16}{10} = 3,2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n} = \mu_{x^2} - (\mu_x)^2 = 11 - (3,2)^2 = 0,76$$

$\sigma_X = \sqrt{0,76} = 0,87$

2.c

$Y_i = a + b \cdot X_i = 500 + X_i$

Lo scarto quadratico medio, così come la varianza, è invariante per traslazione, ovvero se viene aggiunta una costante a ciascuna determinazione del carattere lo scarto quadratico medio non cambia.

$\sigma_y^2 = b^2 \cdot \sigma_x^2$; $\sigma_y = |b| \cdot \sigma_x = \sigma_x = 0,87$

2.d

		n_J	1	0	5	4
n_i	X_i	X_i	1	2	3	4
1	1		0			
0	2		0	0		
5	3		10	0	0	
4	4		12	0	20	0

$$\Delta = \frac{2\sum_{i>j}|x_i - x_j|(n_i \cdot n_j)}{n(n-1)} = \frac{2(10+12+20)}{10 \cdot 9} = \frac{42}{90} = 0,93$$

$$\Delta_{MAX} = 2\mu = 2 \times 3,625 = 7,25$$

$$R = \frac{\Delta}{\Delta_{max}} = \frac{0,93}{7,25} = 0,146$$

ESERCIZIO N° 3

Data la seguente distribuzione del carattere "qualifica funzionale" relativa a 20 dipendenti dell'azienda informatica "APIWEB".

Qualifica funzionale	n_i
Operaio	9
Impiegato	8
Dirigente	3
Totale	20

Calcolare l'indice di eterogeneità di Gini e l'indice di Gini Normalizzato.

3.

max omogeneità: *$f1=f2=....=f_{j-1}=...f_k=0$ e $f_j=1$* (tutte le unità del collettivo presentano la stessa modalità).

max eterogeneità: *$f1= f2=....=f_j=....f_k= 1/k$.* (tutte le modalità sono presenti con la stessa frequenza nel collettivo).

Qualifica funzionale	n_i	f_i	f_i^2
Operaio	9	0,45	0,20
Impiegato	8	0,40	0,16
Dirigente	3	0,15	0,02
Totale	20	1	

Indice di eterogeneità di GINI:

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i^2 = 1 - (0,2 + 0,16 + 0,02) = 0,62$$

$$G_{MAX} = 1 - \frac{1}{K} = 1 - \frac{1}{3} = 0,67$$

Indice di eterogeneità di GINI normalizzato:

$$G^* = \frac{G}{G_{MAX}} = \frac{0,62}{0,67} = 0,93$$

G* è elevato, la distribuzione è molto eterogenea.