

Università di Cassino
Corso di Statistica
Esercitazione del 29 gennaio 2010

Simona Balzano

Esercizio 1

Verificare la proprietà associativa della media aritmetica rispetto a diversi livelli di inquinamento considerando la spesa media delle famiglie nelle regioni suddivise in 3 gruppi in base all'effetto serra (basso, medio, alto), sintetizzata nella tabella seguente:

Gruppo (Effetto serra)	\bar{x}_i Spesa media delle famiglie	n_i
Basso	11,58	7
Medio	32,79	4
Alto	71,02	9
		20

sapendo che la spesa media generale delle famiglie è 42,57 milioni di euro.

Soluzione

Media generale: 42,57

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i n_i = \frac{11,58 \times 7 + 32,79 \times 4 + 71,02 \times 9}{20} = 42,57$$

Esercizio 2

A partire dalla seguente distribuzione di frequenza del carattere EFFETTO SERRA (modificato):

x_i	n_i
1	3
2	4
3	4
7	3
9	2
11	3
24	1
	20

- Calcolare la moda, la mediana, i quartili e la varianza
- Calcolare la media di un carattere Y legato ad X (EFFETTO SERRA) mediante la relazione: $Y = 2,9 + X$

Soluzione

a)

- Moda

La moda è il valore con la frequenza (assoluta o relativa) maggiore. In questo caso si tratta di una distribuzione bimodale, in quanto la frequenza massima (4) si ripete per due valori:

x_i	n_i	f_i
1	3	0,15
2	4	0,2
3	4	0,2
7	3	0,15
9	2	0,1
11	3	0,15
24	1	0,05

Quindi:

$$Mo_1 = 2$$

$$Mo_2 = 3$$

- Mediana (secondo quartile)

La mediana viene individuata attraverso le frequenze relative cumulate, ed è il primo valore di X per il quale la frequenza relativa cumulata supera lo 0,5:

x_i	n_i	f_i	F_i
1	3	0,15	0,15
2	4	0,2	0,35
3	4	0,2	0,55
7	3	0,15	0,7
9	2	0,1	0,8
11	3	0,15	0,95
24	1	0,05	1
	20	1	

Quindi:

$$Me = 3$$

- Primo e terzo quartile

Il primo ed il terzo quartile sono i valori per i quali la frequenza relativa cumulata supera rispettivamente 0,25 e 0,75, ossia:

$$Q1 = 2$$

$$Q3 = 9$$

- Varianza

Sapendo che la media aritmetica di x è pari a 5,95 (v. esercitazione precedente), la varianza è data da:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i = \\ &= (1 - 5,95)^2 \times 0,15 + (2 - 5,95)^2 \times 0,2 + (3 - 5,95)^2 \times 0,2 + (7 - 5,95)^2 \times 0,15 + \\ &+ (9 - 5,95)^2 \times 0,1 + (11 - 5,95)^2 \times 0,15 + (24 - 5,95)^2 \times 0,05 = \\ &= 3,68 + 3,12 + 1,74 + 0,17 + 0,93 + 3,83 + 16,29 = 29,75 \end{aligned}$$

Formula alternativa

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k x_i^2 f_i - \bar{x}^2 \\ &= 1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,2 + \dots + 24^2 \times 0,05 - (5,95)^2 = 29,75 \end{aligned}$$

b)

La media di Y può essere ottenuta attraverso la relazione:

$$\bar{y} = 2,9 + \bar{x} = 2,9 + 5,95 = 8,85$$

Esercizio 3

Data la seguente distribuzione di frequenza del carattere MONOSSIDO DI CARBONIO, suddiviso in classi equiampie:

$x_{i-1} - x_i$	n_i	f_i	F_i	b_i
7,5 - 91,5	9	0,45	0,45	84.0
91,5 - 175,5	4	0,2	0,65	84.0
175,5 - 259,5	6	0,3	0,95	84.0
259,5 - 343,6	1	0,05	1	84.1
	20	1		

determinarne la classe modale, la mediana e i quartili.

Soluzione

- Classe modale

Essendo le classi equiampie, la classe modale è quella con la frequenza (assoluta o relativa) più elevata, ossia:

Classe modale: 7,5 – 91,5

- Mediana (secondo quartile)

La classe mediana è quella in cui la frequenza relativa cumulata supera il valore 0,5, ossia:

Classe mediana: 91,5 – 175,5

Al suo interno:

$$\begin{aligned} \text{Me} &= x_{\text{Me}-1} + (0,5 - F_{\text{Me}-1}) \frac{b_{\text{Me}}}{f_{\text{Me}}} = \\ &= 91,5 + (0,5 - 0,45) \frac{175,5 - 91,5}{0,2} = 112,53 \end{aligned}$$

- Primo quartile

La classe del primo quartile è quella in cui la frequenza relativa cumulata supera il valore 0,25, ossia:

Classe Q1: 7,5 – 91,5

Al suo interno:

$$\begin{aligned} Q1 &= x_{Q1-1} + (0,25 - F_{Q1-1}) \frac{b_{Q1}}{f_{Q1}} = \\ &= 7,5 + (0,25 - 0) \frac{84}{0,45} = 54,18 \end{aligned}$$

- Terzo quartile

La classe del terzo quartile è quella in cui la frequenza relativa cumulata supera il valore 0,75, ossia:

Classe Q1: 175,5 – 259,5

Al suo interno:

$$\begin{aligned} Q3 &= x_{Q3-1} + (0,75 - F_{Q3-1}) \frac{b_{Q3}}{f_{Q3}} = \\ &= 175,5 + (0,75 - 0,65) \frac{84}{0,3} = 203,53 \end{aligned}$$

Esercizio 4

Data la seguente distribuzione di frequenza del carattere MONOSSIDO DI CARBONIO (si veda Esercitazione 1):

$X_{i-1} - X_i$	n_i	f_i	F_i	b_i	h_i
0 - 35	3	0.15	0.15	35.0	0.004286
35 - 90	6	0.30	0.45	55.0	0.005455
90 - 200	7	0.35	0.80	110.0	0.003182
200 - 350	4	0.20	1	150.0	0.001333
	20	1			

determinarne la classe modale, i quartili e la varianza

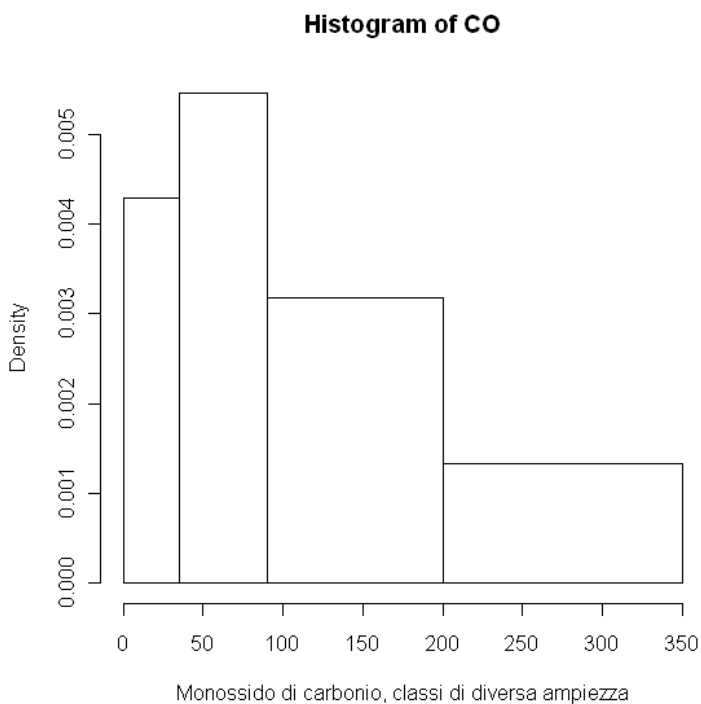
Soluzione

- Moda

Essendo le classi di ampiezza non costante, la classe modale è quella cui corrisponde la più alta densità di frequenza h_i , quindi:

Classe modale: 35 – 90

La classe modale si può individuare anche dall'istogramma, come quella classe che presenta l'altezza maggiore:



- Primo quartile

Classe Q1: 35 – 90

Al suo interno:

$$Q1 = x_{Q1-1} + (0,25 - F_{Q1-1}) \frac{b_{Q1}}{f_{Q1}} =$$

$$= 35 + (0,25 - 0,15) \frac{90 - 35}{0,3} = 53,3$$

- Mediana (secondo quartile)

Classe mediana (Q2): 90 – 200

Al suo interno:

$$Me = x_{Me-1} + (0,5 - F_{Me-1}) \frac{b_{Me}}{f_{Me}} =$$

$$= 90 + (0,5 - 0,45) \frac{200 - 90}{0,35} = 105,7$$

- Terzo quartile

Classe Q3: 90 – 200

Al suo interno:

$$Q_3 = x_{Q3-1} + (0,75 - F_{Q3-1}) \frac{b_{Q3}}{f_{Q3}} =$$

$$= 90 + (0,75 - 0,45) \frac{110}{0,35} = 184,3$$

- Varianza

È necessario calcolare i valori centrali delle classi:

$$c_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{35}{2} = 17,5$$

$$c_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{35 + 90}{2} = 62,5$$

$$c_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{90 + 200}{2} = 145$$

$$c_4 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{200 + 350}{2} = 275$$

La media è:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k c_i f_i = 17,5 \times 0,15 + 62,5 \times 0,3 + 145 \times 0,35 + 275 \times 0,2 = 127,13$$

La varianza:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k (c_i - \bar{x})^2 f_i = \\ &= (17,5 - 127,13)^2 \times 0,15 + (62,5 - 127,13)^2 \times 0,3 + \\ &+ (145 - 127,13)^2 \times 0,35 + (275 - 127,13)^2 \times 0,2 = 7540,79 \end{aligned}$$

Formula alternativa

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^k c_i^2 f_i - \bar{x}^2 \\ &= 17,5^2 \times 0,15 + 62,5^2 \times 0,3 + 145^2 \times 0,35 + 275^2 \times 0,2 - (127,13)^2 = 7540,79 \end{aligned}$$