Università di Cassino

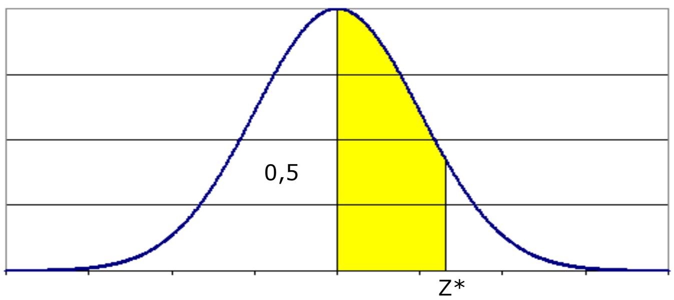
Corso di Statistica

Esercitazione del 19 marzo 2010

Simona Balzano

Nota:

Nelle soluzioni di questa esercitazione si fa riferimento ad una tavola della distribuzione Normale standardizzata (allegata) dove la cella che corrisponde all'incrocio dei due valori la cui somma è z* contiene la probabilità che Z sia compresa tra 0 e z*, ossia l'area gialla rappresentata in figura:



Esercizio 1

Sia X la variabile casuale che descrive la lunghezza (in millimetri) delle foglie di una determinata pianta. Se X è distribuita normalmente con media μ = 50 e varianza σ^2 = 100, determinare la probabilità che una foglia sia lunga:

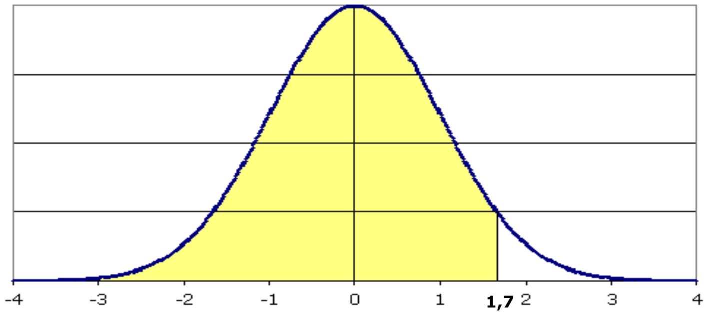
a) fino a 67 mm.
b) più di 55 mm.
c) fino a 47 mm.
d) più di 42 mm.
e) da 58 a 67 mm.
f) da 38 a 47 mm.
g) da 48 a 57 mm.

Soluzione

$X \sim N(50, 100)$

a)

$$P(X \le 67) = P(Z \le z_{67}) = P\left(Z \le \frac{67-50}{10}\right) = P(Z \le 1{,}7)$$

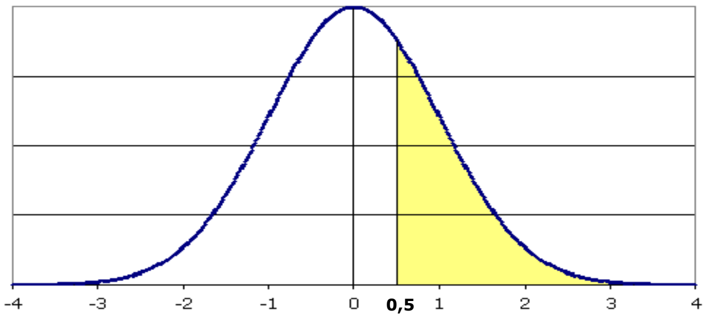


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...	...
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	...	...
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	...	...
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	...	...
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z \le 1{,}7) = 0{,}5 + 0{,}4554 =$ **0,9554**

b)

$$P(X > 55) = P(Z > z_{55}) = P\left(Z > \frac{55-50}{10}\right) = P(Z > 0{,}5)$$

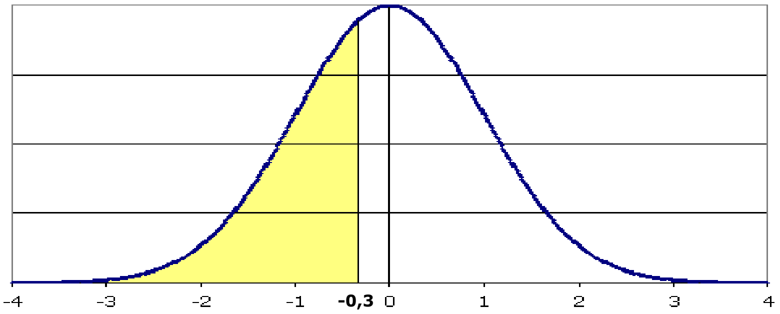


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	...	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	...	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	...	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	...	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	...	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z > 0{,}5) = 0{,}5 - P(0 \le Z \le 0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 =$ **0,3085**

c)

$$P(X \le 47) = P(Z \le z_{47}) = P\left(Z \le \frac{47-50}{10}\right) = P(Z \le -0{,}3)$$

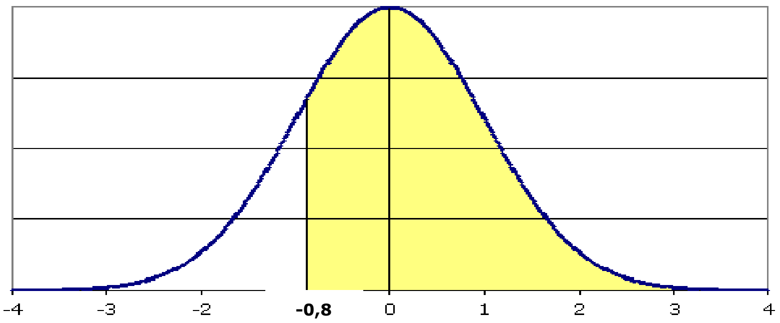


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	...	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	...	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	...	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	...	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	...	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z \le -0{,}3) = P(Z > 0{,}3) = 0{,}5 - P(0 \le Z \le 0{,}3) = 0{,}5 - 0{,}1179 =$ **0,3821**

d)

$$P(X > 42) = P(Z > z_{42}) = P\left(Z > \frac{42-50}{10}\right) = P(Z > -0{,}8)$$



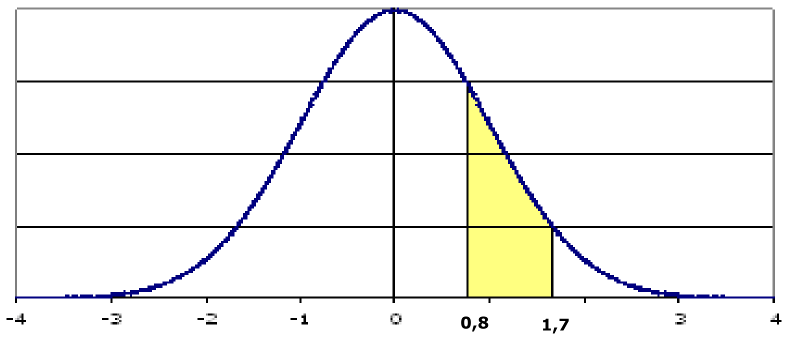
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05		
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	...	...
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	...	...
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	...	...
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	...	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z > -0{,}8) = P(Z \le 0{,}8) = 0{,}5 + 0{,}2881 =$ **0,7881**

e)

$P(58 \le X \le 67) = P(z_{58} \le Z \le z_{67})$

$$z_{58} = \frac{58-50}{10} = 0{,}8\,; \qquad z_{67} = \frac{67-50}{10} = 1{,}7$$



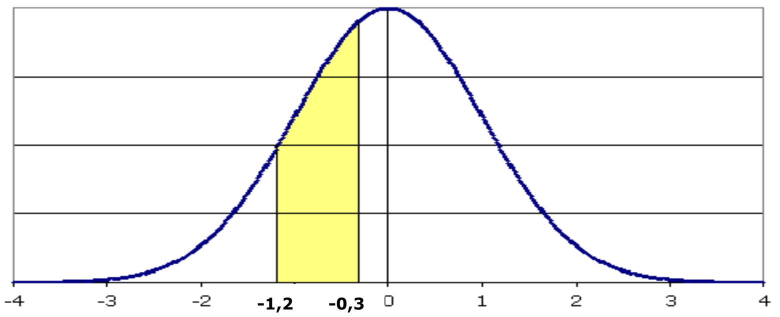
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	...	...
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	...	...
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	...	...
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	...	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...	...
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	...	...
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	...	...
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	...	...
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(0{,}8 \le Z \le 1{,}7) = P(0 \le Z \le 1{,}7) - P(0 \le Z \le 0{,}8) = 0{,}4554 - 0{,}2881 =$ **0,1673**

f)

$P(38 \le X \le 47) = P(z_{38} \le Z \le z_{47})$

$$z_{38} = \frac{38-50}{10} = -1{,}2\,; \qquad z_{47} = \frac{47-50}{10} = -0{,}3$$



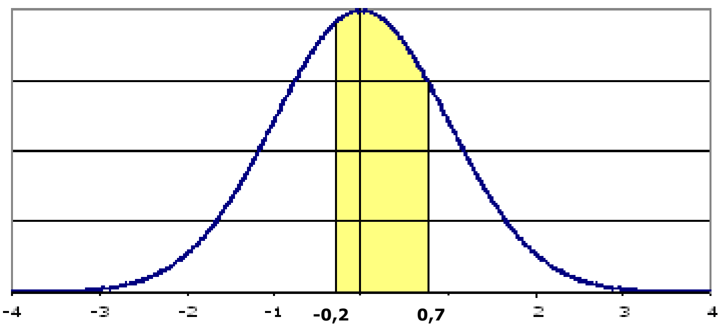
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	...	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	...	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	...	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	...	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	...	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...	...
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	...	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	...	...
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	...	...
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(-1{,}2 \leq Z \leq -0{,}3) = P(0 \leq Z \leq 1{,}2) - P(0 \leq Z \leq 0{,}3) = 0{,}3849 - 0{,}1179 =$
$= \mathbf{0{,}267}$

g)

$P(48 \leq X \leq 57) = P(z_{48} \leq Z \leq z_{57})$

$$z_{48} = \frac{48-50}{10} = -0{,}2\,; \qquad z_{67} = \frac{57-50}{10} = 0{,}7$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	...	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	...	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	...	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	...	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	...	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	...	...
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	...	...
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	...	...

$P(-0{,}2 \leq Z \leq 0{,}7) = P(0 \leq Z \leq 0{,}7) + P(0 \leq Z \leq 0{,}2) = 0{,}2580 + 0{,}0793 =$
$= \mathbf{0{,}3373}$

ESERCIZIO 2

In una località marina la temperatura durante l'anno si distribuisce normalmente con media μ = 22 °C e scarto quadratico medio σ = 4 °C:

$$X \sim N\,(22,\ 16)$$

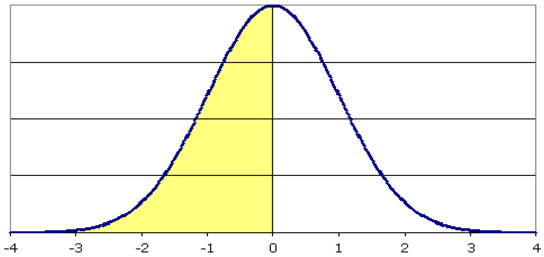
Determinare la probabilità che in un giorno a caso la temperatura sia:

a) minore o uguale a 22
b) maggiore di 24
c) compresa tra 22 e 24
d) compresa tra 18 e 24
e) compresa tra 16 e 18

f) Quante volte in 1 anno si registra una temperatura maggiore di 30?

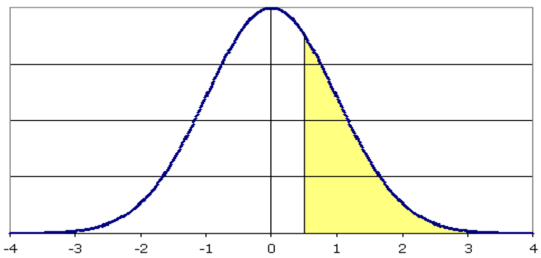
Soluzione

a) $P\,(X \leq 22)$ = **0,5**



b) $P\,(X > 24)$

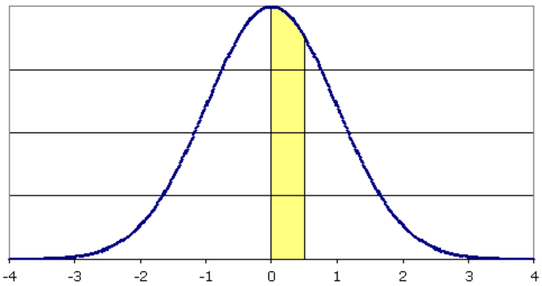
$$z_{24} = \frac{24 - 22}{4} = 0{,}5$$



$P\,(X > 24) = P(Z > 0{,}5) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 =$ **0,3085**

c) P (22 ≤ X ≤ 24)

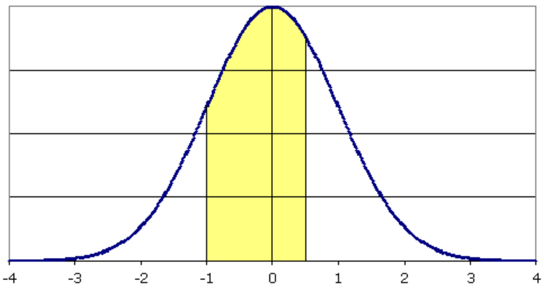
$$z_{24} = \frac{24-22}{4} = 0,5$$



P (10 ≤ X ≤ 12) = P (0 ≤ Z ≤ 0,5) = **0,1915**

d) P (18 ≤ X ≤ 24)

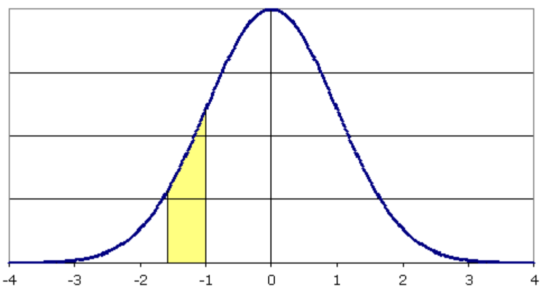
$$z_{18} = \frac{18-22}{4} = -1\,; \qquad z_{24} = \frac{24-22}{4} = 0,5$$



P (18 ≤ X ≤ 24) = P (-1 ≤ Z ≤ 0,5) = P(0 ≤ Z ≤ 0,5) + P(-1 ≤ Z ≤ 0) =
= 0,1915 + 0,3413) = **0,5328**

e) P (16 ≤ X ≤ 18)

$$z_{16} = \frac{16-22}{4} = -1,5\,; \qquad z_{18} = \frac{18-22}{4} = -1$$

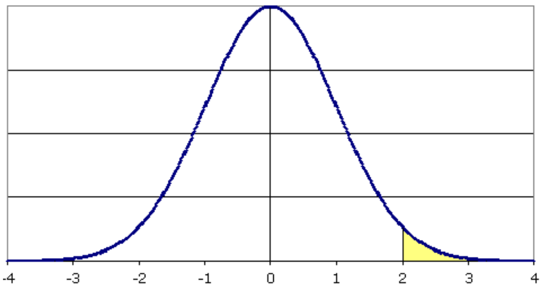


P (16 ≤ X ≤ 18) = P (-1,5 ≤ Z ≤ -1) = P (0 ≤ Z ≤ 1,5) – P (0 ≤ Z ≤ 1) = 0,4332 – 0,3413 = **0,0919**

f)
N_{30} = numero di giorni in cui si registrano più di 30° C

$N_{30} = 365 \times P(X > 30)$

$$z_{30} = \frac{30-22}{4} = 2$$



$N_{30} = 365 \times P(Z > 2) = 365 \times [0{,}5 - P\ (0 \le Z \le 2)] = 365 \times (0{,}5 - 0{,}4772) = 365 \times 0{,}0228 =$ **8,3**

ESERCIZIO 3

Sia X la v.c. Normale con media μ = 67 grammi e varianza σ^2 = 36, che descrive il peso delle uova deposte in un allevamento:

$$X \sim N\ (67,\ 36)$$

Si determini:

a) i quartili Q_1, Q_2 e Q_3 di X;
b) il valore x_0 tale che il 10% delle uova pesi meno di x_0;
c) il valore x_1 tale che il 20% delle uova pesi più di x_1;

Soluzione

I tre quesiti richiedono di determinare un valore di X a partire da un valore noto di probabilità.
Pertanto vanno risolti ricercando nella tavola il valore della funzione di ripartizione F(z) per risalire all'ascissa z cui corrisponde.

z	**0**	**0,01**	**0,02**	**...**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	...	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	...	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	...	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	...	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	...	0,6808	0,6844	0,6879
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	**F(z)**	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	...	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	...	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	...	0,9998	0,9998	0,9998

Il valore di X viene infine calcolato utilizzando la trasformazione inversa alla standardizzazione, ossia:

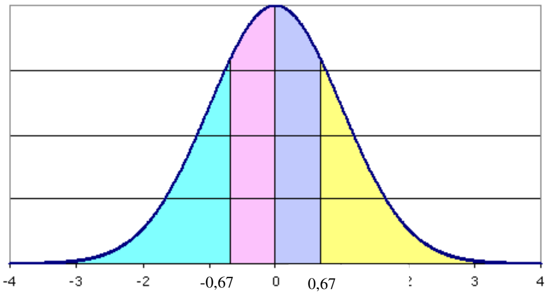
$$x = z\sigma + \mu$$

a)
I 3 quartili si dispongono lungo l'asse delle ascisse ad intervalli tali che l'area compresa tra uno e l'altro sia uguale a 0,25.
Per la simmetria, rispetto alla normale standard $z_{Q1} = -\ z_{Q3}$.

$P\ (0 \leq Z \leq z_{Q3}) = 0,25$

Il valore della F(z) più vicino a 0,75 è 0,7486, che cui corrisponde un ascissa z pari a 0,67.

Quindi: $z_{Q3} = 0,67$ e $z_{Q1} = -\ 0,67$



Ad essi corrispondono ai due valori di X:

$Q_3 = z\sigma + \mu = (z_{Q3} \times 6) + 67 = (0{,}67 \times 6) + 67 =$ **71,02**

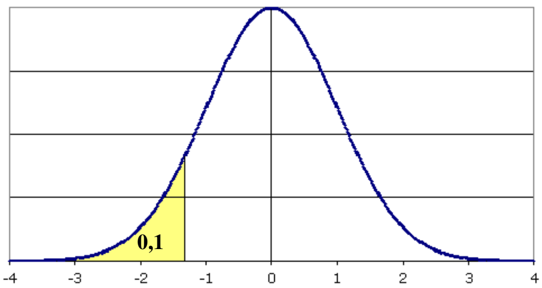
$Q_1 = z\sigma + \mu = (z_{Q1} \times 6) + 67 = (-\ 0{,}67 \times 6) + 67 =$ **62,98**

Il secondo quartile Q_2 corrisponde alla mediana, che nella distribuzione Normale coincide con la media, quindi è pari a **67**.

b)
x_0 : $P(X \leq x_0) = 0{,}1$

Il valore x_0 si determina a partire dal corrispondente valore standardizzato:

$$z_0 : P(Z \leq z_0) = 0{,}1$$



Bisogna cercare sulla tavola il valore z_0 corrispondente ad un'area pari alla:

$P(-\ z_0 \leq Z \leq 0) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$

quindi:

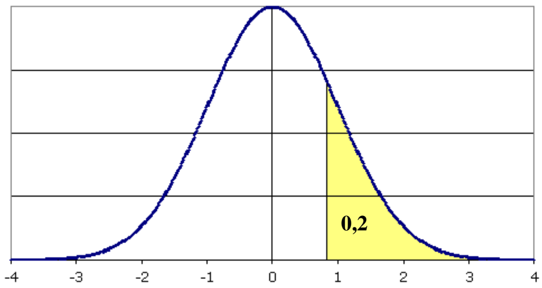
$z_0 = -\ 1{,}28$

Da cui:

$x_0 = z_0\sigma + \mu = -1{,}28 \times 6 + 67 =$ **59,32**

c)
x_1 : $P(X > x_1) = 0,2$

Seguendo lo steso procedimento, si cerca z_1 : $P(Z \geq z_1) = 0,2$



z_1 è l’ascissa corrispondente ad un’area pari alla:

$P(0 \leq Z \leq z_1) = 0,5 - 0,2 = 0,3$

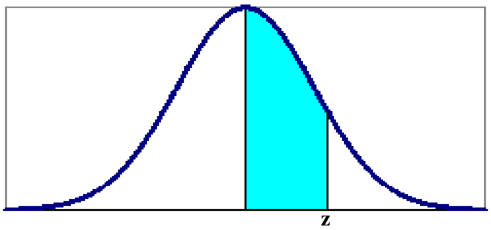
Dalle tavole:

$z_1 = 0,84$

Quindi:

$x_1 = z_1\sigma + \mu = 0,84 \times 6 + 67 =$ **72,4**

ALLEGATO: Tavola della Normale standard: P(0 ≤ Z ≤ z)



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000