Università di Cassino

Corso di Statistica

Esercitazione del 12 marzo 2010

Simona Balzano

ESERCIZIO 1.

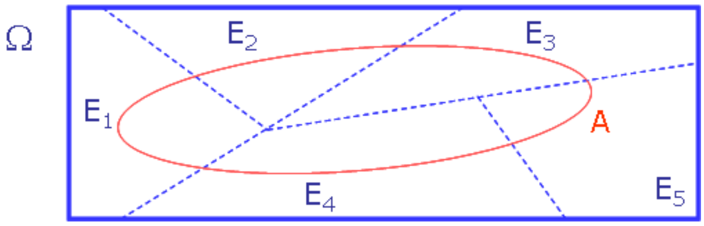
In un'università gli iscritti sono per il 40% maschi e per il 60% femmine. Chiedono la tesi in statistica 1/5 dei maschi e 1/20 delle femmine. Determinare la probabilità che scegliendo a caso uno studente:

a) chieda la tesi in statistica
b) sia maschio e chieda la tesi in statistica
c) avendo chiesto la tesi in statistica sia maschio

Soluzione

a)

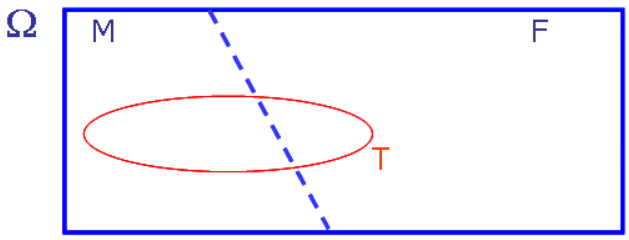
La soluzione si basa sul Teorema delle Probabilità Totali, secondo cui, data la partizione dello spazio campionario Ω negli eventi E_1, …, E_k, e dato un evento $A \subseteq \Omega$, come mostra la figura (dove k = 5):



la probabilità di A può essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_k) = \\ &= P(A|E_1) \times P(E_1) + P(A|E_2) \times P(E_2) + \cdots + P(A|E_k) \times P(E_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A|E_i) \times P(E_i)\end{aligned}$$

Nel nostro caso lo spazio campionario è partizionato negli eventi Maschio (E_1 = M) e Femmina (E_2 = F), quindi k = 2, e l'evento A è rappresentato dall'evento T = Scelta della tesi in statistica:



Quindi, sapendo che:

P(M) = 0,4
P(F) = 0,6
P(T|M) = 1/5 = 0,2
P(T|F) = 1/20 = 0,05

$$P(T) = P(T|M) \times P(M) + P(T|F) \times P(F) = 0,2 \times 0,4 + 0,05 \times 0,6 = 0,11$$

b)

$$P(M \cap T) = P(T|M) \times P(M) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$$

c)

$$P(M | T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,08}{0,11} = 0,727$$

ESERCIZIO 2.

Un gioco consiste nel colpire con una freccetta dei palloncini, al cui interno vi sono dei premi, così distribuiti:

Premi	% di palloncini
€ 0,05	40 %
€ 0,10	30 %
€ 0,25	20 %
€ 1	10 %

Sapendo che la probabilità di colpire un palloncino è 0,5 e il prezzo per acquistare la freccetta è 0,25 €:

a) definire la v.c. vincita/perdita e rappresentarla graficamente
b) determinare la vincita/perdita attesa e la varianza

Soluzione

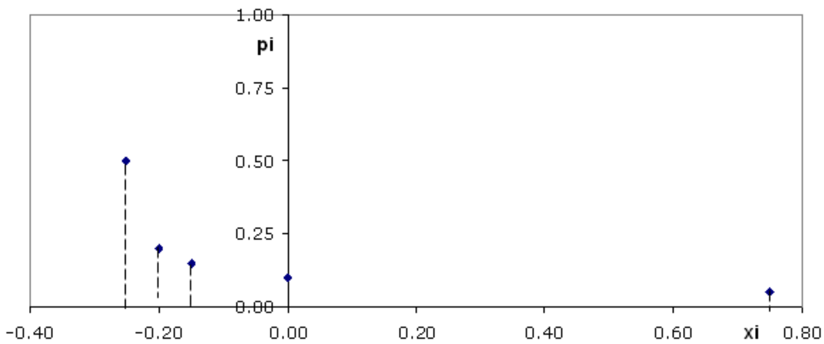
a)

la variabile casuale vincite-perdita è così definita:

Premio - costo	x_i	P_i	
0 – 0,25	-0,25	0,5	Probabilità di non colpire il palloncino
0,05 – 0,25	-0,2	0,2	(= 0,4 x 0,5)
0,10 – 0,25	-0,15	0,15	(= 0,3 × 0,5)
0,25 – 0,25	0	0,1	(= 0,2 × 0,5)
1 – 0,25	0,75	0,05	(= 0,1 × 0,5)
		1	

Le probabilità p_i sono determinate moltiplicando la probabilità del premio per la probabilità di colpire il palloncino.

Rapresentazione grafica della v.c.:



b)

Valore atteso:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i=(-0,25\times 0,5)+(-0,2\times 0,2)+(-0,15\times 0,15)+(0,75\times 0,05)=-0,15$$

Il gioco comporta in media una perdita.

Varianza:

$$E\left[X-E(X)\right]^2=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-E(X)\right)^2p_i=$$

$$=(-0,25+0,15)^2\times 0,5+(-0,2+0,15)^2\times 0,2+$$

$$+(-0,15+0,15)^2\times 0,15+(0+0,15)^2\times 0,1+(0,75+0,15)^2\times 0,05=0,048$$

ESERCIZIO 3.

Un gioco consiste nel lanciare 4 monete per vincere una somma in euro pari al quadrato del numero di teste. Se per giocare bisogna pagare 4€:

a) definire la v.c. vincita/perdita e rappresentarla graficamente
b) determinare la vincita/perdita attesa e la varianza

Soluzione

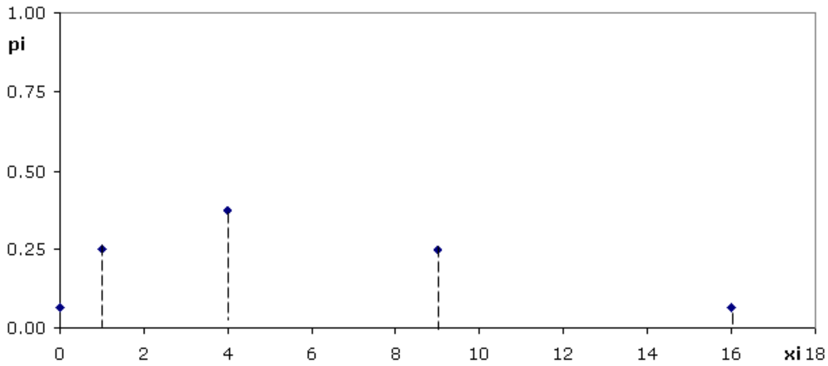
a)

	C1	C2	C3	C4	TESTE
1	T	T	T	T	4
2	T	T	T	C	3
3	T	T	C	T	3
4	T	C	T	T	3
5	C	T	T	T	3
6	T	T	C	C	2
7	T	C	T	C	2
8	T	C	C	T	2
9	C	T	T	C	2
10	C	T	C	T	2
11	C	C	T	T	2
12	C	C	C	T	1
13	C	C	T	C	1
14	C	T	C	C	1
15	T	C	C	C	1
16	C	C	C	C	0

La variabile casuale è definita come segue:

Teste	x_i	$P(x_i)$	
0	0	0,0625	(= 1/16)
1	1	0,25	(= 4/16)
2	4	0,375	(= 6/16)
3	9	0,25	(= 4/16)
4	16	0,0625	(= 1/16)
		1	

La sua rappresentazione grafica:



b)

Valore atteso:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = (1 \times 0,25) + (4 \times 0,375) + (9 \times 0,25) + (16 \times 0,0625) = 5$$

Varianza:

$$E\left[X - E(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i =$$

$$= (0-5)^2 \times 0,0625 + (1-5)^2 \times 0,25 + (4-5)^2 \times 0,375 +$$

$$+ (9-5)^2 \times 0,25 + (16-5)^2 \times 0,0625 = 17,5$$

ESERCIZIO 4

Un'impresa deve valutare 2 progetti A e B, in base alle seguenti informazioni:

progetto	Guadagno in caso di successo	Perdita in caso di insuccesso
A	20000	2000
B	25000	5000

Sapendo che la probabilità di successo ed il guadagno atteso sono uguali per i due progetti, determinare la probabilità di successo p.

Soluzione

Bisogna determinare la probabilità di successo p comune ai due èrogetti, sapendo che il loro guadagno atteso è uguale, ossia che:

E(A) = E(B)

Definendo i valori attesi in funzione di p si ha:

E(A) = 20000 p – 2000 x (1 – p)
E(B) = 25000 p – 5000 x (1 – p)

dove 1 – p è la probabilità di insuccesso.

Essendo E(A) = E(B):

20000 p – 2000 x (1 – p) = 25000 p – 5000 x (1 – p)

quindi:

20000 p + 2000 p – 25000 p – 5000 p = 2000 – 5000

e:

-8000 p = -3000

da cui:

p = 3/8 = 0,375