Università di Cassino

Esercitazione di Statistica 1 del 4 dicembre 2006

Dott.ssa Simona Balzano

Esercizio 1

Sia X la variabile casuale che descrive il risultato del lancio di 2 dadi, sulle cui facce vi sono i numeri: 5, 5, 7, 7, 9, 9.

a) Definire la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione di X;
b) rappresentare X graficamente;
c) calcolare valore atteso, varianza e asimmetria di X.

<u>Soluzione</u>

a)
La variabile casuale X è uguale alla somma delle due variabili casuali X_1 e X_2:

$X = X_1 + X_2$

ciascuna delle quali può assumere 3 possibili valori.
Considerando, quindi, che la probabilità per ciascun valore di X_1 e X_2 è:

P(5) = P(7) = P(9) = 1/3,

la probabilità per ciascuna coppia di valori di X_1 e X_2 è sempre uguale a:

$$P(x_{1i} \cap x_{2j}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0,\bar{1}$$

$\forall$ i, j = 1, 2, 3.

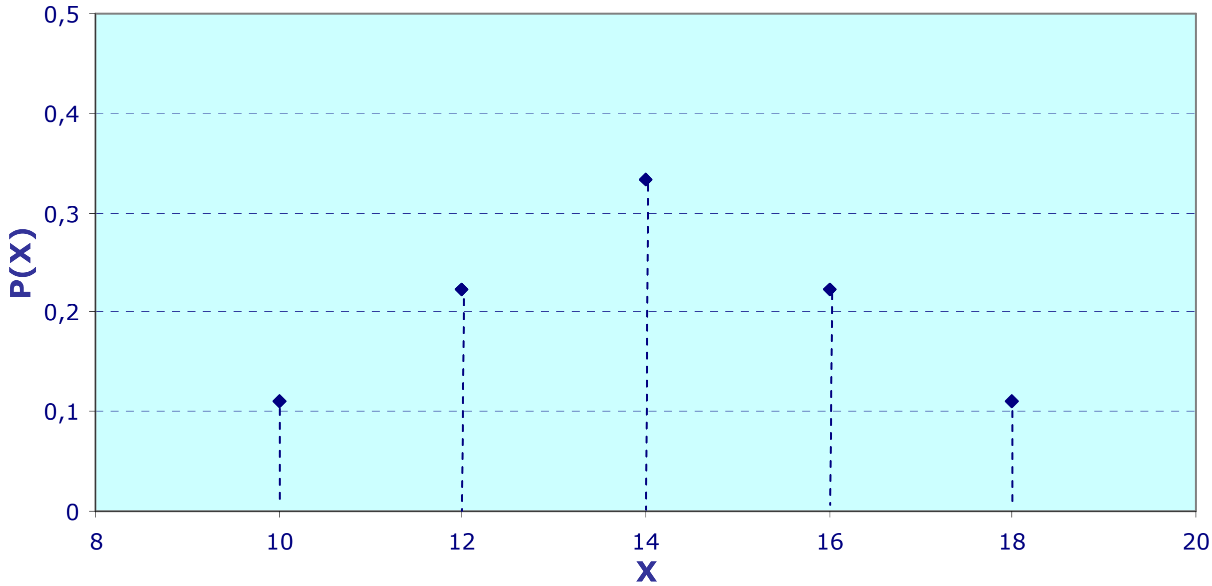
Di fatti, il lancio dei due dadi può dar luogo ai $3^2 = 9$ seguenti risultati:

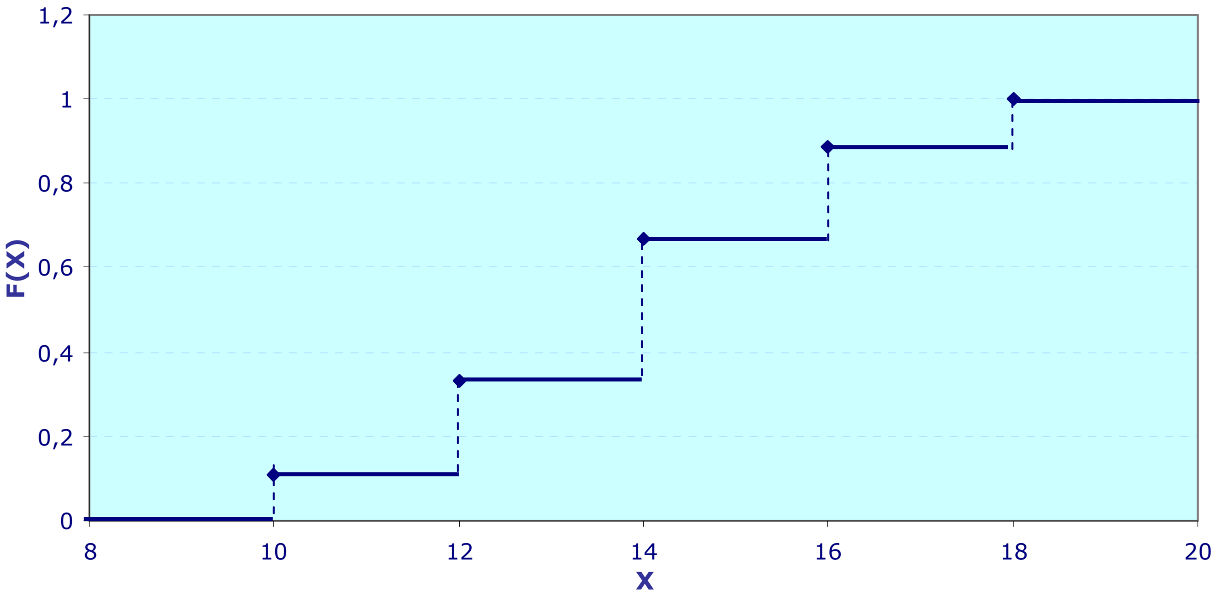
dado 1 X_1	dado 2 X_2	somma X
5	5	10
5	7	12
5	9	14
7	5	12
7	7	14
7	9	16
9	5	14
9	7	16
9	9	18

In conclusione, la distribuzione di probabilità di X è la seguente:

x_i	P (x_i)	$F(x_i)$
10	$0,\overline{1}\ (=1\times 0,\overline{1})$	$0,\overline{1}$
12	$0,\overline{2}\ (=2\times 0,\overline{1})$	$0,\overline{3}$
14	$0,\overline{3}\ (=3\times 0,\overline{1})$	$0,\overline{6}$
16	$0,\overline{2}\ (=2\times 0,\overline{1})$	$0,\overline{8}$
18	$0,\overline{1}\ (=1\times 0,\overline{1})$	1
	1	

b)
La rappresentazione grafica di X è la seguente:





c)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 10\times 0,\bar{1} + 12\times 0,\bar{2} + 14\times 0,\bar{3} + 16\times 0,\bar{2} + 18\times 0,\bar{1} =$$

= 1,11+ 2,67 + 4,67 + 3,56 + 2 = 14

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10-14)^2\times 0,\bar{1} + (12-14)^2\times 0,\bar{2} + (14-14)^2\times 0,\bar{3} +$$
$$+(16-14)^2\times 0,\bar{2} + (18-14)^2\times 0,\bar{1} = 1,78 + 0,89 + 0 + 0,89 + 1,78 = 5,33$$

σ = 2,31

$$\bar{\bar{\mu}}_3 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\sum_i (x_i-\mu)^3 P(x_i)}{\sigma^3} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^3}\left[(10-14)^3\times 0,\bar{1} + (12-14)^3\times 0,\bar{2} + (14-14)^3\times 0,\bar{3} + +(16-14)^3\times 0,\bar{2} + (18-14)^3\times 0,\bar{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2,31^3}\left[(-64\times 0,\bar{1}) + (-8\times 0,\bar{2}) + (0\times 0,\bar{3}) + (8\times 0,\bar{2}) + (64\times 0,\bar{1})\right] = 0$$

Esercizio 2

Un partito politico che in un recente sondaggio è dato vincitore con probabilità pari al 20%, presenta 5 candidati alle imminenti elezioni europee.

a) si definisca la variabile casuale X che descrive il numero di vincitori del partito con la relativa distribuzione di probabilità e funzione di ripartizione;
b) si calcoli il numero medio di vincitori;
c) si calcoli la varianza di X;
d) si rappresenti X graficamente.

Soluzione

a)

La situazione può essere ricondotta allo schema teorico del lancio di 5 monete, che da luogo a $2^5 = 32$ possibili risultati, in cui gli eventi "testa" e "croce" sono sostituiti dagli eventi "vincitore" (V) e "perdente" (P), ciascuno con la sua probabilità:

	C1	C2	C3	C4	C5	Numero di vincitori
1	P	P	P	P	P	0
2	P	P	P	P	V	1
3	P	P	P	V	P	1
4	P	P	P	V	V	2
5	P	P	V	P	P	1
6	P	P	V	P	V	2
7	P	P	V	V	P	2
8	P	P	V	V	V	3
9	P	V	P	P	P	1
10	P	V	P	P	V	2
11	P	V	P	V	P	2
12	P	V	P	V	V	3
13	P	V	V	P	P	2
14	P	V	V	P	V	3
15	P	V	V	V	P	3
16	P	V	V	V	V	4
17	V	P	P	P	P	1
18	V	P	P	P	V	2
19	V	P	P	V	P	2
20	V	P	P	V	V	3
21	V	P	V	P	P	2
22	V	P	V	P	V	3
23	V	P	V	V	P	3
24	V	P	V	V	V	4
25	V	V	P	P	P	2
26	V	V	P	P	V	3
27	V	V	P	V	P	3
28	V	V	P	V	V	4
29	V	V	V	P	P	3
30	V	V	V	P	V	4
31	V	V	V	V	P	4
32	V	V	V	V	V	5

Inoltre, considerando che per ciascun candidato la probabilità di essere eletto è pari a 0,2, ed ipotizzando l'indipendenza tra le possibilità di successo dei candidati, è possibile procedere al calcolo delle probabilità associate ai diversi valori che X può assumere:

P(X = 5 vincitori) =
$P(V \cap V \cap V \cap V \cap V) = 0{,}2^5 = 0{,}00032$

P(X = 4 vincitori) =
$P(V \cap V \cap V \cap V \cap P) =$
$P(V \cap V \cap V \cap P \cap V) =$
$P(V \cap V \cap P \cap V \cap V) =$
$P(V \cap P \cap V \cap V \cap V) =$
$P(P \cap V \cap V \cap V \cap V) = 0{,}2^4 \times 0{,}8 = 0{,}00128$

P(X = 3 vincitori) =
$P(V \cap V \cap V \cap P \cap P) =$
$P(V \cap V \cap P \cap V \cap P) =$
$P(V \cap P \cap V \cap V \cap P) =$
$P(P \cap V \cap V \cap V \cap P) =$
$P(V \cap V \cap P \cap P \cap V) =$
$P(V \cap P \cap V \cap P \cap V) =$
$P(P \cap V \cap V \cap P \cap V) =$
$P(V \cap P \cap P \cap V \cap V) =$
$P(P \cap V \cap P \cap V \cap V) =$
$P(P \cap P \cap V \cap V \cap V) = 0{,}2^3 \times 0{,}8^2 = 0{,}00512$

P(X = 2 vincitori) =
$P(P \cap P \cap P \cap V \cap V) =$
$P(P \cap P \cap V \cap P \cap V) =$
$P(P \cap V \cap P \cap P \cap V) =$
$P(V \cap P \cap P \cap P \cap V) =$
$P(P \cap P \cap V \cap V \cap P) =$
$P(P \cap V \cap P \cap V \cap P) =$
$P(V \cap P \cap P \cap V \cap P) =$
$P(P \cap V \cap V \cap P \cap P) =$
$P(V \cap P \cap V \cap P \cap P) =$
$P(V \cap V \cap P \cap P \cap P) = 0{,}2^2 \times 0{,}8^3 = 0{,}02048$

P(X = 1 vincitore) =
$P(P \cap P \cap P \cap P \cap V) =$
$P(P \cap P \cap P \cap V \cap P) =$
$P(P \cap P \cap V \cap P \cap P) =$
$P(P \cap V \cap P \cap P \cap P) =$
$P(V \cap P \cap P \cap P \cap P) = 0{,}2 \times 0{,}8^4 = 0{,}08192$

P(X = 0 vincitori) =
$P(P \cap P \cap P \cap P \cap P) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$

La variabile casuale X segue, pertanto, la seguente distribuzione di probabilità:

frequenza	x_i	$P(x_i)$	
1	0	0,32768	(= 1 × 0,32768)
5	1	0,40960	(= 5 × 0,08192)
10	2	0,20480	(= 10 × 0,02048)
10	3	0,05120	(= 10 × 0,00512)
5	4	0,00640	(= 5 × 0,00128)
1	5	0,00032	(= 1 × 0,00032)
32		**1**	

Nota:
Le probabilità elementari dei valori di X avrebbero potuto essere deterimnate considerando che X si distribuisce secondo la legge Binomiale, di parametri n = 5 e p = 0,2:

$$X \sim B(5;\ 0,2)$$

In base a tale distribuzione, la probabilità P(X) si ottiene come:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

dove $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ e dove per definizione $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e 0! = 1, ∀ n.

Avremo, quindi, avuto:

$$P(0) = \binom{5}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0{,}32768$$

$$P(1) = \binom{5}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0{,}08192$$

$$P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 = 0{,}02048$$

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0{,}00512$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (1)} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = 0{,}00128$$

$$P(5) = \binom{5}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0{,}00032$$

b)
Il numero atteso di vincitori per il partito è dato da:

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i) = 0\times 0,32768 + 1\times 0,08192 + 2\times 0,02048 + 3\times 0,00512 + 4\times 0,00128 + 5\times 0,00032 = \mathbf{1}$$

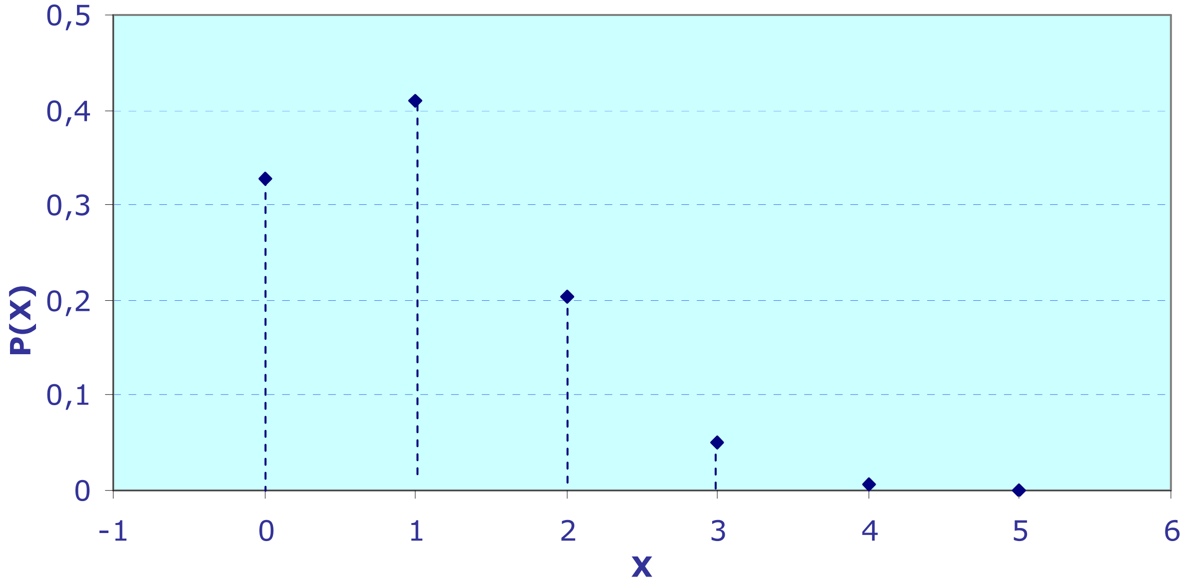
c)
La varianza di X è:

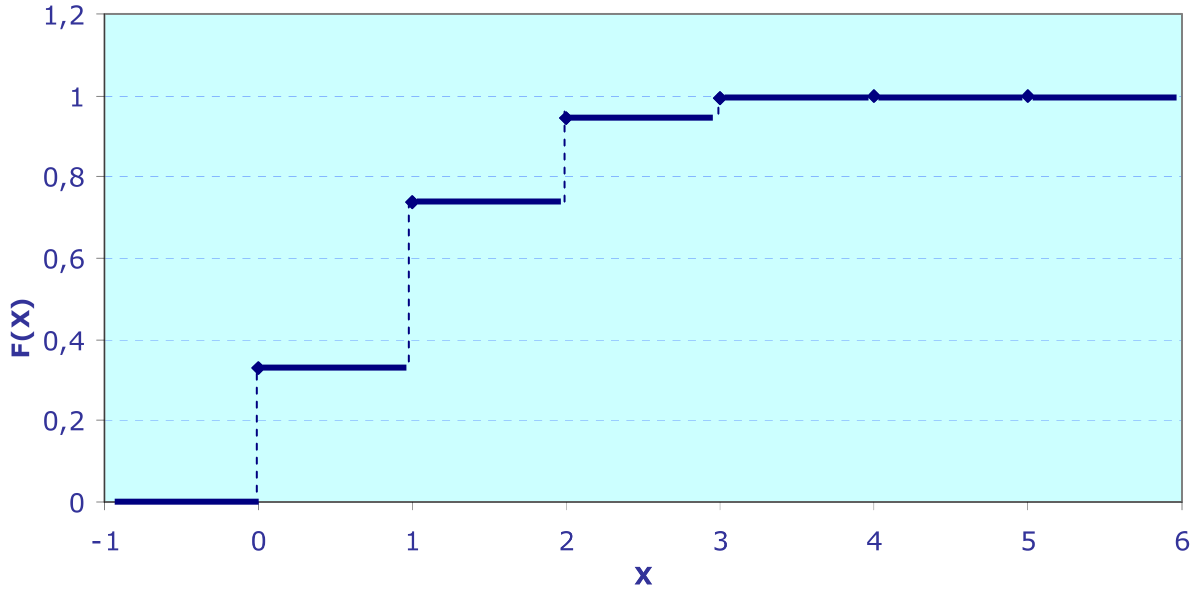
$$var(X)=\sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 P(x_i) = (0-1)^2\times 0,32768 + (1-1)^2\times 0,08192 + (2-1)^2\times 0,02048 + (3-1)^2\times 0,00512 + (4-1)^2\times 0,00128 + (5-1)^2\times 0,00032 = \mathbf{0,8}$$

Nota:
In modo più semplice, E(X) e var(X) avrebbero potuto essere calcolati come valore atteso e varianza di una variabile casuale Binomiale, ossia:

$E(X) = n \times p = 5 \times 0,2 =$ **1**
$Var(X) = n \times p \times (1 - p) = 5 \times 0,2 \times 0,8 =$ **0,8**

d)





Esercizio 3

Considerando il dataset studenti si evince per il carattere numero di scarpa la seguente distribuzione di frequenza:

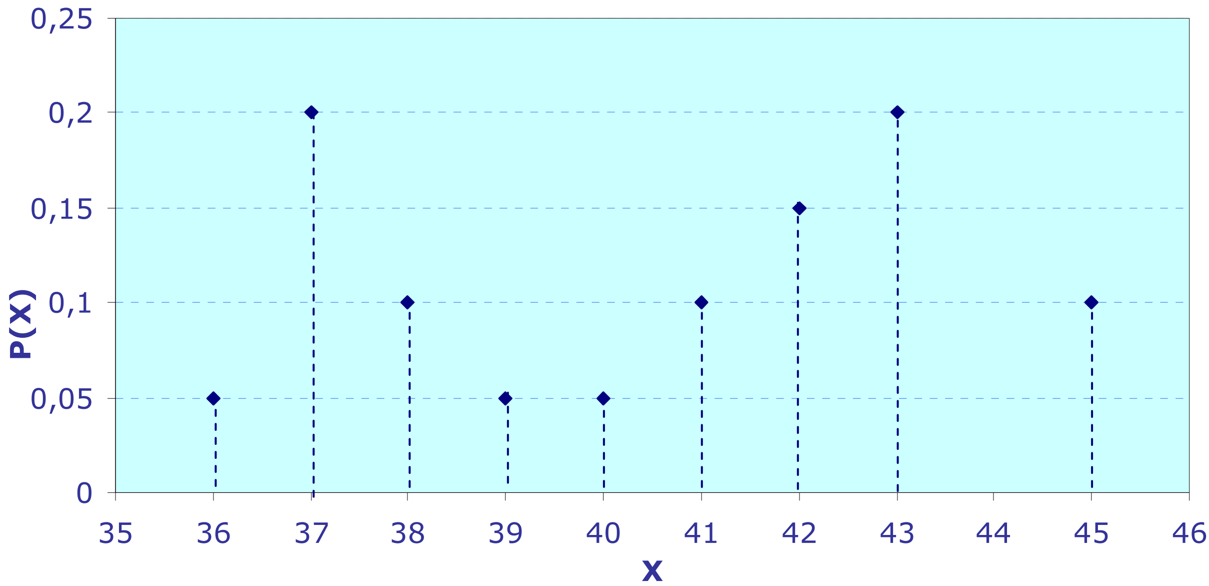
Numero di scarpa	Frequenza
36	1
37	4
38	2
39	1
40	1
41	2
42	3
43	4
45	2
totale	**20**

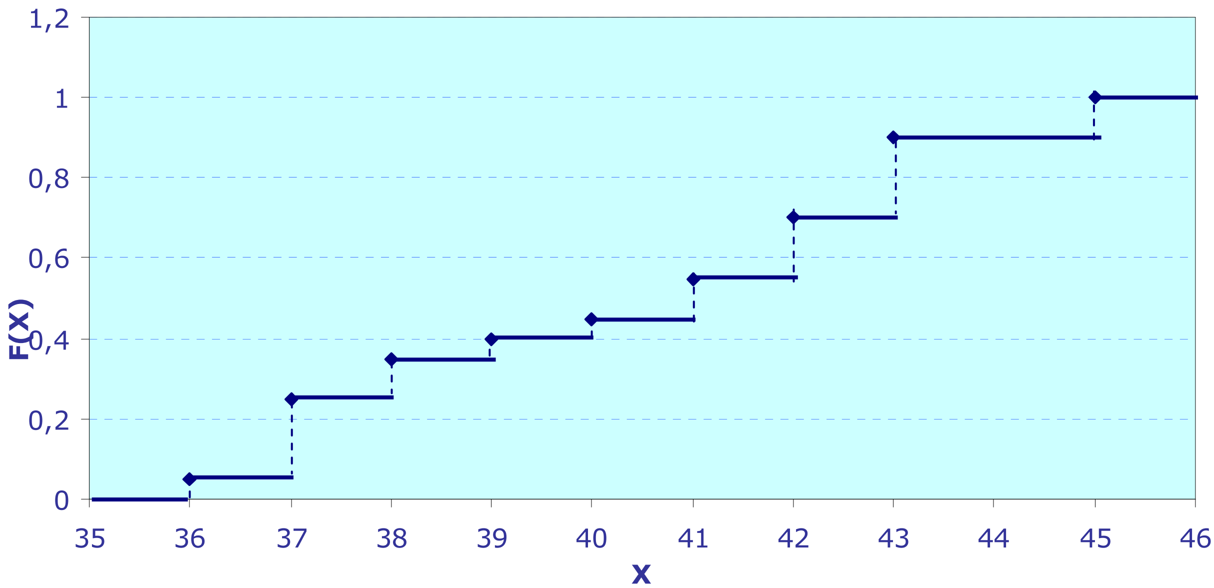
a) si definisca la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale X = "numero di scarpa" e la si rappresenti graficamente;
b) si calcoli il numero atteso di scarpa tra tutti gli studenti;
c) si calcoli lo scarto quadratico medio di X;
d) qual è la probabilità che uno studente abbia una taglia:
1. inferiore a 39;
2. al massimo pari a 39;
3. esattamente pari a 39;
4. compresa tra 39 e 42.

<u>Soluzione</u>

a)
Le probabilità per i diversi valori di X possono essere calcolati come frequenza relative. La variabile casuale X ha, dunque, la seguente distribuzione di probabilità:

x_i	$P(x_i)$	$F(x_i)$
36	0,05	0,05
37	0,2	0,25
38	0,1	0,35
39	0,05	0,4
40	0,05	0,45
41	0,1	0,55
42	0,15	0,7
43	0,2	0,9
45	0,1	1
	1	





b)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) =$$

$$= (36 \times 0,05) + (37 \times 0,2) + (38 \times 0,1) + (39 \times 0,05) + \ldots + (45 \times 0,1) =$$

$$= \mathbf{40,45}$$

c)

$$\sigma_X^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (36 - 40,45)^2 \times 0,05 + (37 - 40,45)^2 \times 0,2 + + \ldots + (45 - 40,45)^2 \times 0,1 =$$

$$= \mathbf{7,8475}$$

d)

1. $P(X < 39) = \sum_{x_i < 39} P(x_i) = 0,05 + 0,2 + 0,1 = \mathbf{0,35}$

2. $P(X \leq 39) = F(39) = \sum_{x_i \leq 39} P(x_i) = 0,05 + 0,2 + 0,1 + 0,05 = \mathbf{0,4}$

3. $P(X \geq 39) = \sum_{x_i \geq 39} P(x_i) = 1 - P(X < 39) = 0,05 + 0,2 + 0,1 = 1 - 0,35 = \mathbf{0,65}$

4. $P(X = 39) = \mathbf{0,05}$

5. $P(X > 39) = \sum_{x_i > 39} P(x_i) = 1 - P(X \leq 39) = 1 - F(39) = 1 - 0,4 = \mathbf{0,6}$

Esercizio 4

Si consideri il gioco, legato al lancio di una coppia di dadi regolari, in cui si perde 1 € fino ad un punteggio pari a 8, si vince 1 € se si ottiene da 9 a 11, si vincono 5 € se si ottiene 12.

a) si definisca la distribuzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale X = risultato della scommessa;
b) si rappresenti graficamente X;
c) sulla base di valore atteso e varianza di X, conviene giocare?

<u>Soluzione</u>

a)
La variabile casuale X può assumere i valori: -1, 1, 5, associati ai possibili risultati del lancio come segue:

e_i	x_i
$2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8$	-1
$9 \cup 10 \cup 11$	+1
12	+5

Le probabilità delle x_i vengono, pertanto, calcolate come probabilità degli e_i.

Dado 1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Somma	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	12

Le probabilità dei possibili valori s_i della somma dei due dadi sono:

s_i	$P(s_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Da cui si ricava:

$P(2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8) =$
$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{26}{36}=0,722$

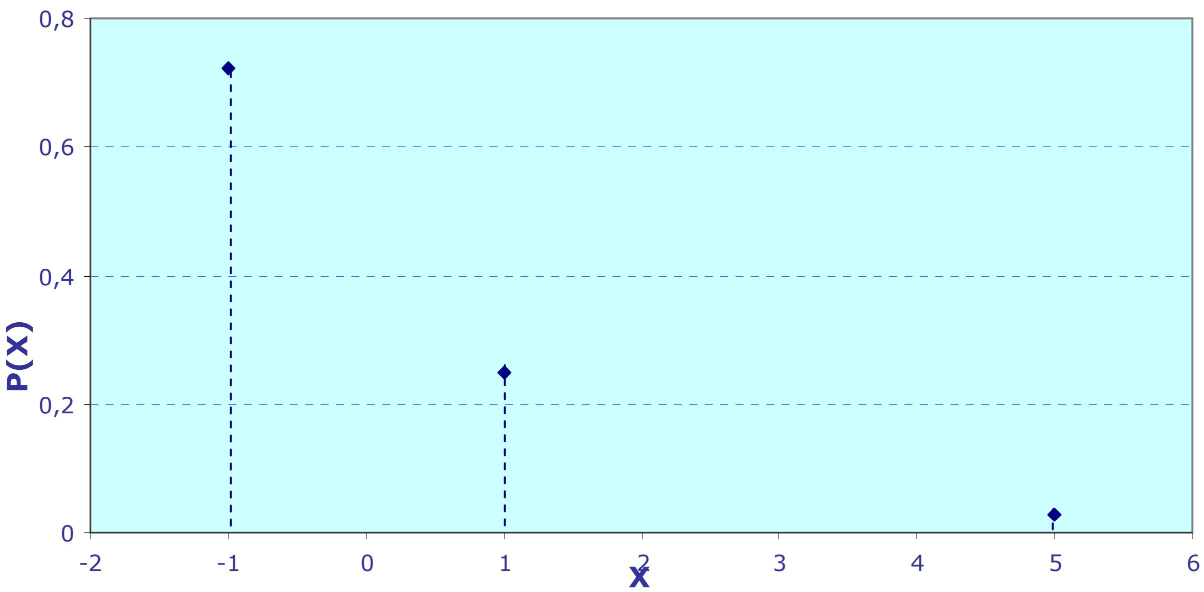
$P(9 \cup 10 \cup 11) = \frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}=\frac{9}{36}=0,25$

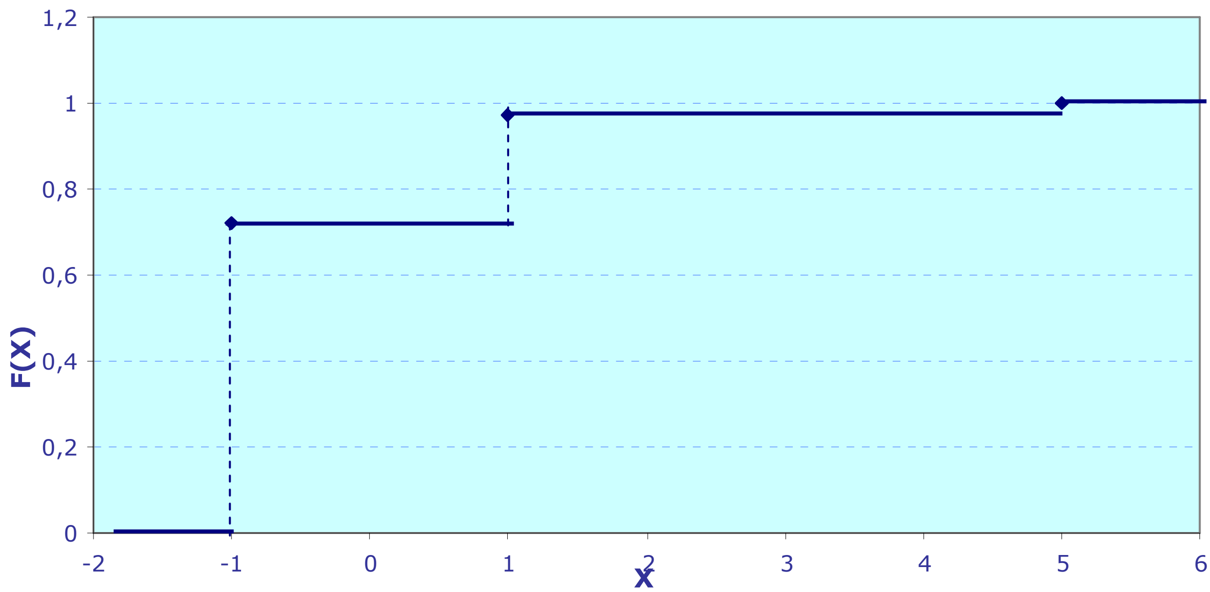
$P(12) = \frac{1}{36} = 0,028$.

La distribuzione di probabilità di X è, dunque:

x_i	$P(x_i)$	$F(x_i)$
-1	0,722	0,722
+1	0,25	0,972
+5	0,028	1
	1	

b)





c)

La media di X è pari a:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = (-1 \times 0,722) + (1 \times 0,25) + (2 \times 0,028) = 0,33$$

ossia il gioco comporta in media una vincita del 33% per il giocatore (non una perdita, quindi conviene giocare).

La varianza di X è:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$
$$= (-1 - 0,33)^2 \times 0,722 + (1 - 0,33)^2 \times 0,25 + (5 + 0,33)^2 \times 0,028) =$$
$$= \mathbf{1,556}$$